فصل هشتم

سری‌های نامتناهی

۸ . ۱ مقدمات و تعریف

قبل از تعریف سری‌ها توضیح مختصری در مورد $\sum$ (بخوانید سیگما) لازم به نظر می‌رسد.
برای ساده‌نویسی و سرعت بیشتر در ارایه مطالب حاصلجمع اعداد حقیقی $a_1, a_2, \ldots a_n$ را با استفاده از نماد $\sum$ به صورت $\sum_{k=1}^{n} a_k$ نمایش می‌دهند،یعنی

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$$

a_k را **جمله عمومی** می‌نامند. اندیس k متغیری است که دامنه تغییرات آن مجموعه $\{1,2,3,\ldots,n\}$ است . تساوی $k=1$ در زیر نماد $\sum$ بدین معنی است که اولین مقدار k عدد 1 است و عدد n در بالای $\sum$یعنی آخرین مقدار k عدد n است. به عبارت دیگر نماد $\sum_{k=1}^{n} a_k$ نشان دهنده این مطلب است که اندیس k اعداد صحیح از 1 تا n را اختیار می کند.

مثال ۱: الف) برای هر عدد طبیعی n داریم

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}, \qquad \sum_{k=1}^{n} k = 1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2},$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = 1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

ب) از تعریف میانگین n داده آماری $x_1, x_2, \ldots x_n$ می‌دانیم که

$$\overline{x} = \frac{x_1 + \ldots + x_n}{n} = \frac{\sum_{k=1}^{n} x_k}{n}.$$

توجه کنید که وقتی نماد $\sum_{k=1}^{n} a_k$ را به کار می‌بریم می‌خوانیم، حاصلجمع a_k ، k از 1 تا n.

اکنون با استفاده از خواص اعداد حقیقی به سادگی می‌توان ویژگی‌های زیر را برای نماد $\sum$ بیان کرد:

الف) $\quad \sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=1}^{n} b_k = \sum_{k=1}^{n} (a_k + b_k)$;

ب)برای هر عدد ثابت c، $\sum_{k=1}^{n} ca_k = c\sum_{k=1}^{n} a_k$;

ج) اگر $n<m$ آنگاه $\sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=n+1}^{m} a_k = \sum_{k=1}^{m} a_k$;

د) می‌توان ویژگی (الف) را تعمیم داد یعنی:

$$\sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=1}^{n} b_k + \ldots + \sum_{k=1}^{n} x_k = \sum_{k=1}^{n}\left(a_k + b_k + \ldots + x_k\right).$$

حل.

الف) با استفاده از خاصیت تعویضپذیری جمع اعداد حقیقی داریم:

$$\sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=1}^{n} b_k = \left(a_1 + a_2 + \ldots + a_n\right) + \left(b_1 + b_2 + \ldots + b_n\right) =$$
$$\left(a_1 + b_1\right) + \left(a_2 + b_2\right) + \ldots + \left(a_n + b_n\right) = \sum_{k=1}^{n}\left(a_k + b_k\right).$$

ب) می‌توان نوشت:

$$\sum_{k=1}^{n} ca_k = ca_1 + ca_2 + \ldots + ca_n =$$
$$c\left(a_1 + a_2 + \ldots + a_n\right) = c\sum_{k=1}^{n} a_k$$

که از توزیعپذیری ضرب نسبت به جمع در اعداد حقیقی استفاده کرده‌ایم.

ج) با استفاده از شرکتپذیری جمع در اعداد حقیقی داریم

$$\sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=n+1}^{m} a_k = \left(a_1 + \ldots + a_n\right) + \left(a_{n+1} + \ldots + a_m\right)$$
$$= a_1 + \ldots + a_n + a_{n+1} + \ldots + a_m = \sum_{k=1}^{m} a_k$$

د) با استفاده از (الف) و به کمک استقراء ریاضی درستی رابطه را ثابت کنید.

با تعریف و بررسی سری‌ها در حقیقت ما مفهوم جمع را از تعداد متناهی به تعداد نامتناهی تعمیم می‌دهیم.

تعریف: دنباله $\{a_n\}$ از اعداد حقیقی را در نظر می‌گیریم. فرض می‌کنیم

$$s_1 = a_1, \qquad s_2 = a_1 + a_2, \qquad s_3 = a_1 + a_2 + a_3, \ldots$$

و به طوری که برای هر عدد طبیعی n

$$s_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \qquad (1)$$

بنابر تعریف دنباله $\{s_n\}$ را یک **سری نامتناهی** یا به طور ساده‌تر یک **سری** می‌نامیم. ما نماد زیر را برای نمایش سری به کار می‌بریم:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots \quad . \qquad (2)$$

$a_1, a_2, \ldots$ را **جملات سری** و a_n را **جمله عمومی سری** می‌نامند. همچنین

$$s_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$$

حاصلجمع جزئی n **ام سری** نامیده می‌شود.
اگر دنباله $\{s_n\}$ از حاصلجمع‌های جزئی همگرا بوده و حد آن $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = s$ باشد،آنگاه سری (2) را **همگرا (متقارب)** می نامیم. اگر دنباله $\{s_n\}$ واگرا باشد یعنی وقتی $n \to \infty$ دنباله $\{s_n\}$ به حدی متناهی میل نکند آنگاه سری (2) را **واگرا(متباعد)** می‌نامند. در حالتی که سری همگرا به حاصل جمع s باشد می‌نویسیم:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots = s$$

(که می‌خوانیم حاصلجمع n, a_n از 1 تا بینهایت)
و یا

$$s = a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots .$$

تبصره مهم: در کار با سری‌ها اغلب با دو نوع پرسش مواجه هستیم.

اول: از ما خواسته می‌شود که همگرایی یک سری را بررسی کنیم و در صورت همگرا بودن حاصلجمع آن را به دست آوریم. در این مورد مثال‌هایی ارائه خواهیم داد و معلوم خواهد شد که به دست آوردن مقدار دقیق حاصلجمع یک سری همگرا همواره کار آسانی نیست.
دوم: گاهی در بررسی یک سری تنها اطلاع از همگرایی یا واگرایی آن کافی است و نیاز به یافتن مقدار حاصلجمع آن در مساله مورد نظر نداریم. در اینجا کار قدری ساده‌تر است. بدین معنی که از راه مقایسه سری با سری‌های دیگری که رفتار آنها را می‌دانیم. حکم به همگرایی یا واگرایی سری اولیه می‌دهیم.

مثال ۲: همگرایی سری‌های زیر را با به دست آوردن حاصلجمع آنها ثابت کنید.

$$(i) \qquad ;\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$$

$$(ii) \qquad ;\sum_{n=1}^{\infty} log\frac{n(n+2)}{(n+1)^2}$$

(iii) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)(n+2)}$.

حل. (i) ابتدا کسر $\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$ را به حاصلجمع دو کسر ساده‌تر تجزیه می‌کنیم. روش کار بدین شکل است:

می‌نویسیم، $\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{A}{2n-1}+\frac{B}{2n+1}$ که در آن B, A ثابتهای مجهول هستند و بایستی آنها را پیدا کنیم. با ضرب طرفین تساوی بالا در $(2n-1)(2n+1)$ به دست می‌آوریم

$$1=A(2n+1)+B(2n-1)$$

حال ریشه‌های مخرج را در تساوی اخیر قرار می‌دهیم.

برای $n=\frac{1}{2}$ داریم $A(1+1)+0=1$ یعنی $A=\frac{1}{2}$. برای $n=-\frac{1}{2}$ داریم $1=0+B(-1-1)$.

پس $B=-\frac{1}{2}$ و بنابراین $\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)$. لذا

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2}(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1})$$

که در آن $a_n=\frac{1}{2}(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1})$ جمله عمومی سری است. اکنون سعی می‌کنیم حاصلجمع جزئی n ام سری را برحسب n بدست آوریم:

$$s_n=a_1+a_2+\ldots+a_n=\frac{1}{2}[(1-\frac{1}{3})+(\frac{1}{3}-\frac{1}{5})+\ldots+(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1})]$$

یا $s_n=\frac{1}{2}(1-\frac{1}{2n+1})$. چون

$$\lim_{n\to\infty}s_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}(1-\frac{1}{2n+1})=\frac{1}{2}(1-0)=\frac{1}{2}$$

بنابراین حاصلجمع سری عبارت است از

$$s=\lim_{n\to\infty}s_n=\frac{1}{2}.$$

(ii) فرض کنیم $u_n=\log\frac{n(n+2)}{(n+1)^2}$ جمله عمومی سری باشد. چون

$$\frac{n(n+2)}{(n+1)^2}=\frac{\frac{n}{n+1}}{\frac{n+1}{n+2}}$$

پس می‌توانیم بنویسیم

$$u_n=\log\frac{n(n+2)}{(n+1)^2}=\log\frac{n}{n+1}-\log\frac{n+1}{n+2}.$$

حال

$$s_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n =$$
$$(\log\frac{1}{2} - \log\frac{2}{3}) + (\log\frac{2}{3} - \log\frac{3}{4}) + \ldots + (\log\frac{n}{n+1} - \log\frac{n+1}{n+2}) = \log\frac{1}{2} - \log\frac{n+1}{n+2}.$$

پس مقدار حاصلجمع سری عبارت است از

$$s = \lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty}(\log\frac{1}{2} - \log\frac{n+1}{n+2}) = \log\frac{1}{2} - \log 1 = \log\frac{1}{2}.$$

(iii)جمله عمومی را با $u_n = \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$ نشان داده و این کسر را به حاصلجمع کسرهای ساده‌تر تجزیه می‌کنیم:

$$\frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{A}{n} + \frac{B}{n+1} + \frac{C}{n+2}$$

که در آن C, B, A ثابتهای مجهولی هستند که بایستی آنها را پیدا کنیم. با ضرب کردن طرفین تساوی بالا در مخرج طرف چپ بدست می‌آوریم

$$1 = A(n+1)(n+2) + Bn(n+2) + Cn(n+1).$$

اکنون $n=0$ قرار داده و بدست می‌آوریم $1 = 2A$ و بنابراین $A = \frac{1}{2}$.

$n=-1$ قرار داده و بدست می‌آوریم $1 = -B$ و بنابراین $B = -1$.

بالاخره $n=-2$ قرار داده و به دست می‌آوریم $1 = 2C$ و لذا $C = \frac{1}{2}$.

بنابراین داریم

$$u_n = \frac{1}{2}(\frac{1}{n} - \frac{2}{n+1} + \frac{1}{n+2}) .$$

پس

$$u_1 = \frac{1}{2}(1 - \frac{2}{2} + \frac{1}{3}), \qquad u_2 = \frac{1}{2}(\frac{1}{2} - \frac{2}{3} + \frac{1}{4}), \qquad u_3 = \frac{1}{2}(\frac{1}{3} - \frac{2}{4} + \frac{1}{5}), \qquad u_4 = \frac{1}{2}(\frac{1}{4} - \frac{2}{5} + \frac{1}{6}), \ldots$$

و حاصلجمع جزئی n ام عبارت است از

$$s_n = u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + \ldots + u_{n-1} + u_n = \frac{1}{2}(1 - \frac{2}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2} - \frac{2}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{2}{4} +$$
$$\frac{1}{5} + \frac{1}{4} - \frac{2}{5} + \frac{1}{6} + \ldots + \frac{1}{n-1} - \frac{2}{n} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n} - \frac{2}{n+1} + \frac{1}{n+2}) = \frac{1}{2}(\frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2}) .$$

در نتیجه $\lim_{n\to\infty} s_n = \frac{1}{4}$. بنابراین سری همگرا و حاصلجمع آن مساوی $\frac{1}{4}$ است.

قضیهٔ ۱: (شرط لازم برای همگرایی)

اگر سری $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ همگرا باشد آنگاه حد جمله عمومی آن صفر است، یعنی

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0.$$

اثبات. اگر s_n, s_{n-1} به ترتیب حاصلجمع های جزئی $(n-1)$ ام و n ام سری باشند، یعنی

$$s_{n-1} = a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1},$$
$$s_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1} + a_n$$

آنگاه داریم $a_n = s_n - s_{n-1}$. اما اگر $\lim_{n\to\infty} s_n = s$ آنگاه می توانیم بنویسیم

$$\lim_{n\to\infty} s_{n-1} = \lim_{n-1\to\infty} s_{n-1} = \lim_{m\to\infty} s_m = s$$

که بدیهی است وقتی $n \to +\infty$ ، $m = n-1 \to +\infty$. بنابراین

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\left(s_n - s_{n-1}\right) = \lim_{n\to\infty} s_n - \lim_{n\to\infty} s_{n-1} = s - s = 0\,.$$

تبصره مهم: همانگونه که در عنوان قضیه بالا دیدید شرط قضیه برای همگرایی لازم است ولی کافی نیست بدین معنی که سری‌های فراوانی وجود دارند که حد جمله عمومی آنها صفر است ولی خود سریها واگرا هستند.

گاهی اوقات ممکن است از قضیه بالا برای واگرایی یک سری استفاده کنیم، یعنی اگر بتوانیم نشان دهیم که حد جمله عمومی سری صفر نمی شود، آنگاه به استناد قضیه فوق حکم به واگرایی سری می کنیم. بنابراین از قضیه ۱ نتیجه می شود که ،

اگر $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$ آنگاه سری $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ واگراست.

به مثال هائی که در این زمینه ارائه شده است توجه نمائید.

مثال ۳: نشان دهید که سری‌های زیر واگرا هستند:

$(i)\quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+1}{n^2}$ $\qquad$ $(ii)\quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} 3$.

حل. (i)جمله عمومی $a_n = \frac{n^2+1}{n^2}$ است و داریم

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2+1}{n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{1+\frac{1}{n^2}}{1} = 1 \neq 0\,.$$

پس بنا بر قضیه ۱، سری (i) واگراست.

(ii) جمله عمومی $a_n=(-1)^{n+1}3$ است و به سادگی دیده می‌شود که $\lim_{n\to\infty} a_n$ وجود ندارد و سری واگراست.

مثال ۴: سری $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\dots+\frac{1}{n}+\dots$ به نام **سری همساز (هارمونیک)** معروف است. ثابت می‌کنیم این سری واگراست.برای این منظور سری را با تعداد بیشتری از جملات می‌نویسیم:

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\frac{1}{9}+\frac{1}{10}+\frac{1}{11}+\frac{1}{12}+\frac{1}{13}+\frac{1}{14}+\frac{1}{15}+\frac{1}{16}+\dots \quad . \qquad (1)$$

همچنین یک سری کمکی به صورت زیر می‌نویسیم:

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\dots \quad . \quad (2)$$

سری (2) به روش زیر نوشته شده است:

اولین جمله آن مساوی واحد است، دومین جمله آن $\frac{1}{2}$ است، سومین و چهارمین جمله آن $\frac{1}{4}$ هستند، پنجمین تا هشتمین جمله آن $\frac{1}{8}$ هستند. از جمله‌های 9 تا 16 مساوی $\frac{1}{16}$ هستند و الی آخر.

حاصلجمع جزئی nام سری هارمونیک (1) را با $s_n^{(1)}$ و حاصلجمع جزئی nام سری (2) را با $s_n^{(2)}$ نشان می‌دهیم. چون هر جمله سری (1) بزرگتر یا مساوی جمله متناظرش در سری (2) است، پس برای $n>2$ داریم

$$s_n^{(1)} > s_n^{(2)} \qquad (3)$$

حاصلجمع جزئی سری (2) را برای مقادیر n مساوی با $2^3,2^2,2^1$ محاسبه می‌نماییم

$$s_2^{(2)}=1+\frac{1}{2}=1+1.\frac{1}{2}$$
$$s_4^{(2)}=1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1+2.\frac{1}{2}$$
$$s_8^{(2)}=1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}\right)=1+3.\frac{1}{2}$$

به همین روش مشاهده می کنیم که $s_{2^4}^{(2)}=1+4.\frac{1}{2}$ و $s_{2^5}^{(2)}=1+5.\frac{1}{2}$.

بنابراین برای مقادیر h به قدر کافی بزرگ حاصلجمعهای جزئی سری (2) را بزرگتر از هر عدد مثبتی می‌توان در نظر گرفت، یعنی اگر $M>0$ عدد دلخواهی باشد آنگاه

$$s^{(2)}{}_{2^h} > M \Leftrightarrow 1+h.\frac{1}{2}>M \Leftrightarrow h.\frac{1}{2}>M-1 \Leftrightarrow h>2(M-1)$$

پس اگر $h \geq [2(M-1)]+1$ گرفته شود، آنگاه واضح است که $s_{2^h}{}^{(2)} > M$. از آنچه گفته شد نتیجه می‌گیریم که

$$\lim_{n\to\infty} s_n^{(2)} = +\infty$$

اما رابطه (3) نتیجه می‌دهد که همچنین

$$\lim_{n\to\infty} s_n^{(1)} = +\infty$$

و بنابراین سری همساز (1) واگراست.

توجه کنید که در سری همساز $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ جمله عمومی $a_n=\frac{1}{n}$ است و داریم

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0 \,.$$

می‌بینیم با وجود آنکه حد جمله عمومی سری همساز صفر شده است ولی سری واگراست. این مثال نشان می‌دهد که چرا شرط قضیه ۱ کافی نیست.

مثال ۵: سری $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$ را در نظر می‌گیریم. اگر a_n جمله عمومی سری باشد آنگاه

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{n+1-n} = \sqrt{n+1}-\sqrt{n} \,.$$

اکنون حاصلجمع جزئی nام سری را تشکیل می‌دهیم.

$$s_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{n-1} + a_n$$
$$s_n = \left(\sqrt{2}-1\right)+\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)+\left(\sqrt{4}-\sqrt{3}\right)+\ldots+\left(\sqrt{n}-\sqrt{n-1}\right)+\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right).$$

به سادگی دیده می‌شود که $s_n = \sqrt{n+1}-1$ و بنابراین

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+1}-1\right) = +\infty$$

پس سری واگراست. در اینجا هم توجه کنید که

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = 0.$$

مثال ۶: همگرایی سری $\sum_{n=1}^{\infty}\sin n\alpha = \sin\alpha + \sin 2\alpha + \ldots + \sin n\alpha + \ldots$ را بررسی کنید.

حل. اگر $\alpha = k\pi, k\in Z$ آنگاه $\sin n\alpha = \sin\ nk\pi = 0$ وبنابراین

$$s_n = \sin\alpha + \sin 2\alpha + \ldots + \sin n\alpha = 0+0+\ldots+0 = 0 \,.$$

پس $\lim_{n\to\infty} s_n = 0$ و بنابراین سری همگرا به عدد 0 است.

فرض کنیم $\alpha \neq k\pi, k\in Z$. با استفاده از رابطه مثلثاتی

$$2\sin\alpha\sin\beta = \left[\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)\right]$$

داریم

$$\begin{aligned}
s_n &= \sin\alpha + \sin 2\alpha + \ldots + \sin n\alpha \\
&= \frac{1}{2\sin\frac{\alpha}{2}}\left[2\sin\frac{\alpha}{2}\sin\alpha + 2\sin\frac{\alpha}{2}\sin 2\alpha + \ldots + 2\sin\frac{\alpha}{2}\sin n\alpha\right] \\
&= \frac{1}{2\sin\frac{\alpha}{2}}[(\cos\frac{\alpha}{2} - \cos\frac{3\alpha}{2}) + (\cos\frac{3\alpha}{2} - \cos\frac{5\alpha}{2}) + \ldots \\
&+ (\cos\frac{2n-3}{2}\alpha - \cos\frac{2n-1}{2}\alpha) + (\cos\frac{2n-1}{2}\alpha - \cos\frac{2n+1}{2}\alpha)] \\
&= \frac{1}{2\sin\frac{\alpha}{2}}\left[\cos\frac{\alpha}{2} - \cos\frac{2n+1}{2}\alpha\right].
\end{aligned}$$

به سادگی می‌توان نشان داد که $\lim_{n\to\infty}\cos\frac{2n+1}{2}\alpha$ موجود نیست (در مبحث حد توابع این مطلب را ثابت نمودیم). پس $\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2\sin\frac{\alpha}{2}}\left[\cos\frac{\alpha}{2} - \cos\frac{2n+1}{2}\alpha\right]$ هم موجود نیست و بنابراین سری $\sum_{n=1}^{\infty}\sin n\alpha$ واگراست.

۸ . ۲ سری هندسی

تعریف: سری به شکل $a + ar + ar^2 + \ldots + ar^{n-1} + \ldots \quad (1)$ را یک **سری هندسی** می‌نامند. a **جمله اول** و r **قدر نسبت** سری (1) نامیده می‌شود. معمولاً فرض بر این است که $a \neq 0$.

می‌توان سری (1) را به صورتهای زیر هم نوشت :

$$\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}, \qquad a\sum_{n=1}^{\infty} r^{n-1}.$$

قدر نسبت می‌تواند مثبت باشد مانند سری زیر:

$$1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{2^{n-1}} + \ldots \qquad \left(r = \frac{1}{2}\right)$$

یا می‌تواند منفی باشد مانند سری زیر:

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{9} - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{1}{3^{n-1}} + \ldots \qquad .\left(r = -\frac{1}{3}\right)$$

اکنون حاصلجمع های جزئی سری هندسی (1) را بدست می‌آوریم. حاصلجمع جزئی n ام سری عبارت است از

$$s_n = a + ar + ar^2 + \ldots + ar^{n-1} \quad . \qquad (2)$$

با ضرب طرفین (2) در r خواهیم داشت

$$rs_n = ar + ar^2 + \dots + ar^{n-1} + ar^n \quad . \qquad (3)$$

حال (3) را از (2) کم می‌کنیم

$$s_n - rs_n = a - ar^n$$

یا

$$(1-r)s_n = a(1-r^n). \qquad (4)$$

اگر $r \neq 1$ فرض شود با تقسیم طرفین (4) بر $(1-r)$ داریم

$$s_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r}, \qquad r \neq 1 \qquad . \qquad (5)$$

قضیه ۲: (حاصلجمع سری هندسی)

اگر $|r|<1$، آنگاه سری هندسی

$$a + ar + ar^2 + \dots + ar^{n-1} + \dots \quad (a \neq 0)$$

همگرا بوده و مقدار آن $s = \frac{a}{1-r}$ است. اگر $|r| \geq 1$ آنگاه سری هندسی واگراست.

اثبات. فرض کنیم $|r|<1$. در مثالی از فصل اول دیدیم که $\lim_{n\to\infty} r^n = 0$ و بنابراین

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \frac{a(1-r^n)}{1-r} = \frac{a}{1-r}$$

یعنی در حالتی که $|r|<1$، سری هندسی همگرا بوده و مقدار آن

$$s = a + ar + ar^2 + \dots + ar^{n-1} + \dots = a\sum_{n=1}^{\infty} r^{n-1} = \frac{a}{1-r}$$

است. اگر $|r|>1$، آنگاه $\lim_{n\to\infty} |r|^n = \infty$ و بنابراین سری هندسی (1) واگراست. حال فرض کنیم $|r|=1$، یعنی $r=\pm 1$. اگر $r=1$ آنگاه

$$s_n = a + ar + \dots + ar^{n-1} = \overbrace{a + a + \dots + a}^{n\text{مرتبه}} = na.$$

پس $\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} na = \infty$ و بنابراین سری (1) واگراست. اگر $r=-1$ آنگاه

$$s_1 = a, \qquad s_2 = a - a = 0, \qquad s_3 = a, \dots$$

و به طور کلی $s_n = \begin{cases} a, & n \text{ فرد} \\ 0, & n \text{ زوج} \end{cases}$. پس. $\lim_{n\to\infty} s_n$ وجود نداشته و لذا سری هندسی (1) واگراست.

مثال ۷: (1) سری هندسی با جمله اول $a = \frac{1}{9}$ و قدر نسبت $r = \frac{1}{3}$:

$$\frac{1}{9}+\frac{1}{27}+\frac{1}{81}+\dots=\frac{1}{9}\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\dots\right)=\frac{1}{9}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^{n-1}}=\frac{\frac{1}{9}}{1-\frac{1}{3}}=\frac{1}{6}.$$

(2) سری هندسی با جملهٔ اول $a=4$ و قدر نسبت $r=-\frac{1}{2}$:

$$4-2+1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\dots=4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2^{n-1}}=\frac{4}{1+\frac{1}{2}}=\frac{8}{3}.$$

(3)عدد اعشاری $0.3333...$ را به صورت یک کسر متعارفی بیان می کنیم:

$$0.3333...=\frac{3}{10}+\frac{3}{100}+\frac{3}{1000}+\dots+\frac{3}{10^n}+\dots.$$

پس یک سری هندسی داریم که درآن $a=\frac{3}{10}$ و $r=\frac{1}{10}$. چون $|r|<1$ لذا از قضیه ۲ نتیجه می‌شود که سری همگرا و حاصلجمع آن $\frac{a}{1-r}$ است. بنابراین

$$0.3333...=\frac{\frac{3}{10}}{1-\frac{1}{10}}=\frac{1}{3}.$$

مثال ۸: توپی را از فاصله a متری یک سطح صاف به پایین می‌اندازیم. هر زمان که توپ از ارتفاع h افتاده باشد پس از برخورد با سطح به اندازه rh بالا می رود که در آن r عدد مثبتی کوچکتر از یک است. مسافت کل پیموده شده توسط توپ را پیدا کنید.

شکل ۸ . ۱

حل. فاصله با سری زیر داده شده است:

$$s=a+2ar+2ar^2+2ar^3+\dots.$$

جملات بعد از جمله اول یک سری هندسی با حاصل جمع $\frac{2ar}{1-r}$ را تشکیل می‌دهند.
بنابراین فاصله مساوی است با

$$s = a + \frac{2ar}{1-r} = a\frac{1+r}{1-r}.$$

به عنوان مثال اگر a مساوی 6 متر باشد و $r = \frac{2}{3}$، آنگاه فاصله مورد نظر مساوی است با

$$s = 6\frac{1+\frac{2}{3}}{1-\frac{2}{3}} = 30 \text{ متر}.$$

قضیه ۳: اگر $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ و $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ دو سری همگرا بوده و c عدد ثابتی باشد، آنگاه سری‌های

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n - b_n), \qquad \sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n), \qquad \sum_{n=1}^{\infty} ca_n$$

نیز همگرایند و داریم:

$$\sum_{n=1}^{\infty} ca_n = c\sum_{n=1}^{\infty} a_n,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n \pm b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \pm \sum_{n=1}^{\infty} b_n .$$

اثبات. فرض کنیم $s = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ و $s_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$. حال اگر $t_n = cs_n$ تعریف کنیم داریم

$$t_n = ca_1 + ca_2 + \ldots + ca_n, \qquad \lim_{n\to\infty} t_n = \lim_{n\to\infty} cs_n = cs.$$

پس سری $\sum_{n=1}^{\infty} ca_n$ همگرا به عدد cs است یعنی،

$$\sum_{n=1}^{\infty} ca_n = cs = c\sum_{n=1}^{\infty} a_n .$$

اکنون فرض کنیم $\sigma_n = b_1 + b_2 + \ldots + b_n$ و $\sigma = \sum_{n=1}^{\infty} b_n$،

$$\begin{aligned} s_n + \sigma_n &= (a_1 + \ldots + a_n) + (b_1 + \ldots + b_n) \\ &= (a_1 + b_1) + \ldots + (a_n + b_n) \end{aligned}$$

و

$$\lim_{n\to\infty}\left(s_n + \sigma_n\right) = \lim_{n\to\infty} s_n + \lim_{n\to\infty} \sigma_n = s + \sigma.$$

پس سری $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n)$ همگرا به عدد $s + \sigma$ است یعنی،

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n) = s + \sigma = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n.$$

به همین ترتیب ثابت می‌شود که

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n-b_n)=s-\sigma=\sum_{n=1}^{\infty}a_n-\sum_{n=1}^{\infty}b_n$$

و اثبات قضیه تمام است.

تبصره: فرض کنیم $c\neq 0$ عدد ثابت دلخواهی باشد. از قضیه ۳ نتیجه می‌شود که اگر سری $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ واگرا باشد، آنگاه سری $\sum_{n=1}^{\infty}ca_n$ نیز واگرا است.

به عنوان مثال سری $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n}=\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+...+\frac{1}{4n}+...$ واگراست، زیرا از ضرب ثابت $c=\frac{1}{4}$ در سری هارمونیک $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ که می‌دانیم واگراست، به دست آمده است.

قضیه ۴: اگر سری $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ همگرا و سری $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ واگرا باشد آنگاه سری‌های $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)$ و $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n-b_n)$ واگرا هستند.

اثبات. به عنوان مثال نشان می‌دهیم که سری $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)$ واگراست. اثبات به برهان خلف است، یعنی فرض می‌کنیم که سری $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)$ همگرا بوده و حاصلجمع آن s باشد. همچنین فرض می‌کنیم که حاصلجمع سری $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ برابر با r باشد. می‌توانیم بنویسیم $\sum_{n=1}^{\infty}b_n=\sum_{n=1}^{\infty}\left[(a_n+b_n)-a_n\right]$. پس بنا بر قضیه ۳، $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ همگرا بوده و حاصلجمع آن $s-r$ است. امااین با فرض واگرا بودن $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ متناقض است. بنابراین سری $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)$ واگراست.

به عنوان مثال سری $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{4n}+\frac{1}{4^n}\right)$ واگراست، زیرا در بالا دیدیم سری $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n}$ واگراست و سری $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4^n}$ یک سری هندسی با $|r|=\frac{1}{4}<1$ که همگراست. پس بنا بر قضیه ۴ سری $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{4n}+\frac{1}{4^n}\right)$ واگراست .

تبصره: توجه کنید که اگر سری‌های $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ و $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ هر دو واگرا باشند، آنگاه سری $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)$ ممکن است همگرا باشد یا نباشد. به عنوان مثال اگر $a_n=\frac{1}{n}$ و $b_n=\frac{1}{n}$، آنگاه داریم $a_n+b_n=\frac{2}{n}$ و سری $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n}$ واگراست. اما اگر $a_n=\frac{1}{n}, b_n=-\frac{1}{n}$ آنگاه $a_n+b_n=0$ و سری $\sum_{n=1}^{\infty}0$ همگراست.

توجه: سری $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)$ را **حاصلجمع** و سری $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n-b_n)$ را **تفاضل** سری‌های $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ و $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ می‌نامند.

مثال ۹: اگر بدانیم که $\log_e 2 = 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\dots$، نشان دهید که سری زیر همگرا است و حاصلجمع آن را به دست آورید:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1^2+2^2+3^2+\dots+n^2}\ .$$

حل. می‌دانیم که $1^2+2^2+\dots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$، پس سری بالا چنین است:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{6}{n(n+1)(2n+1)}$$

که در آن $a_n=\frac{6}{n(n+1)(2n+1)}$ جمله عمومی سری است.

قرار می‌دهیم $\frac{6}{n(n+1)(2n+1)}=\frac{A}{n}+\frac{B}{n+1}+\frac{C}{2n+1}$ که در آن C, B, A ثابتهای مجهولی هستند که بایستی آنها را پیدا کنیم. طرفین تساوی بالا را در مخرج کسر طرف چپ ضرب می‌کنیم:

$$6=A(n+1)(2n+1)+Bn(2n+1)+Cn(n+1)$$

$$n=-1\Rightarrow B=6$$

$$n=0\Rightarrow A=6\,,n=-\frac{1}{2}\Rightarrow C=-24\ .$$

پس جمله عمومی به صورت $a_n=\frac{6}{n}+\frac{6}{n+1}-\frac{24}{2n+1}$ است. حال اگر به n مقادیر $1,2,3,\dots$ را نسبت دهیم داریم

$$a_1=\frac{6}{1}+\frac{6}{2}-\frac{24}{3}$$

$$a_2=\frac{6}{2}+\frac{6}{3}-\frac{24}{5}$$

$$a_3=\frac{6}{3}+\frac{6}{4}-\frac{24}{7}$$
$$a_4=\frac{6}{4}+\frac{6}{5}-\frac{24}{9}$$
$$a_5=\frac{6}{4}+\frac{6}{6}-\frac{24}{11}$$

....

اگر با کمی دقت جملات فوق را با هم جمع کنیم خواهیم داشت

$$\begin{aligned} s &= a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+\dots \\ &= 6+12\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{5}+\dots\right) \\ &= 6+12\left[-\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\dots\right)+1\right] \\ &= 18-12\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\dots\right) \end{aligned}$$

و با توجه به توضیح ابتدای مسأله داریم

$$s=18-12\log_e 2$$

بنابراین، می‌توان گفت که سری همگراست و

$$s=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1^2+2^2+3^2+\dots+n^2}=18-12\log_e 2\,.$$

مثال ۱۰: نشان دهید که سری $\sum_{n=1}^{\infty} arctg\frac{1}{n^2+n+1}$ همگراست و حاصلجمع آن را به دست آورید.

حل. جمله عمومی سری $a_n=arctg\frac{1}{1+n(n+1)}$ است (زیرا $n^2+n+1=1+n(n+1)$).

اکنون جمله عمومی a_n را به صورت تفاضل دو قوس در می‌آوریم و برای این منظور اگر قرار دهیم $tg\alpha=\frac{1}{n}, tg\beta=\frac{1}{n+1}$، آنگاه با استفاده از روابط مثلثاتی داریم

$$tg(\alpha-\beta)=\frac{tg\alpha-tg\beta}{1+tg\alpha.tg\beta}=\frac{\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}}{1+\frac{1}{n}.\frac{1}{n+1}}=\frac{1}{1+n(n+1)}$$

و بنابراین $\alpha-\beta=arc\,tg\frac{1}{1+n(n+1)}$. از طرفی $\alpha=arctg\frac{1}{n}$ و $\beta=arc\,tg\frac{1}{n+1}$. لذا $a_n=arc\,tg\frac{1}{n}-arctg\frac{1}{n+1}$. حاصلجمع جزئی n ام سری را می‌نویسیم

$$s_n=a_1+a_2+\dots+a_{n-1}+a_n=$$

$$\left(arc\,tg1-arctg\frac{1}{2}\right)+\left(arctg\frac{1}{2}-arctg\frac{1}{3}\right)+\ldots+$$
$$\left(arc\,tg\frac{1}{n-1}-arc\,tg\frac{1}{n}\right)+\left(arctg\frac{1}{n}-arctg\frac{1}{n+1}\right)$$

و یا $s_n=arc\,tg1-arctg\frac{1}{n+1}$. بنابراین

$$s=\lim_{n\to\infty}s_n=\lim_{n\to\infty}\left(arctg1-arctg\frac{1}{n+1}\right)$$
$$=arc\,tg\,1-arctg\,0=\frac{\pi}{4}-0=\frac{\pi}{4}.$$

در نتیجه سری فوق همگربوده و داریم

$$\sum_{n=1}^{\infty}arc\,tg\frac{1}{n^2+n+1}=\frac{\pi}{4}.$$

مثال ۱۱: همگرایی سری زیر را بررسی کنید:

$$\frac{1}{\sqrt{2}-1}-\frac{1}{\sqrt{2}+1}+\frac{1}{\sqrt{3}-1}-\frac{1}{\sqrt{3}+1}+\ldots.$$

حل. اگر حاصلجمع $2n$ جمله اول سری را با s_{2n} نشان دهیم، داریم

$$s_{2n}=\left(\frac{1}{\sqrt{2}-1}-\frac{1}{\sqrt{2}+1}\right)+\left(\frac{1}{\sqrt{3}-1}-\frac{1}{\sqrt{3}+1}\right)+\ldots$$
$$+\left(\frac{1}{\sqrt{n}-1}-\frac{1}{\sqrt{n}+1}\right)+\left(\frac{1}{\sqrt{n+1}-1}-\frac{1}{\sqrt{n+1}+1}\right).$$

حال در هر پرانتز مخرج مشترک گرفته و بدست می آوریم

$$s_{2n}=\frac{2}{2-1}+\frac{2}{3-1}+\ldots+\frac{2}{n-1}+\frac{2}{n}=2\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n-1}+\frac{1}{n}\right).$$

اما در مثال ۴ ، سری همساز ، دیدیم که چگونه می‌توان حاصلجمع جزئی بزرگتر از هر عدد مثبت دلخواه را پیدا کرد و نشان دادیم که سری $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ واگراست. پس

$$\lim_{n\to+\infty}s_{2n}=\lim_{n\to+\infty}2\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}\right)=+\infty$$

و بنابراین سری مفروض واگراست.

مثال ۱۲: همگرایی سری $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n^2+5n+1}{n^2+4n+2}\right)^{n^2}$ را بررسی کنید.

حل. اگر $a_n=\left(\frac{n^2+5n+1}{n^2+4n+2}\right)^{n^2}$ بگیریم، می‌توانیم بنویسیم

$$a_n=(\frac{n^2+4n+2+(n-1)}{n^2+4n+2})^{n^2}=(1+\frac{n-1}{n^2+4n+2})^{n^2}.$$

برای $n\geq 2$ داریم $1+\frac{n-1}{n^2+4n+2}>1$ و بنابراین $(1+\frac{n-1}{n^n+4n+2})^{n^2}\geq 1$ $\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=\lim\limits_{n\to+\infty}$.

پس $\lim\limits_{n\to+\infty}a_n\neq 0$ و بنابر نتیجه‌ای که از قضیه ۱ گرفته می‌شود سری، مورد نظر واگراست.

مثال ۱۳: همگرایی سریهای زیر را بررسی کنید:

(1) $\frac{2}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{24}+...$

(2) $\frac{1}{11}+\frac{1}{12}+\frac{1}{13}+\frac{1}{14}+...$

(3) $\frac{1}{2}+\frac{2}{5}+\frac{3}{8}+\frac{4}{11}+...$

(4) $0.6+0.51+0.501+0.5001+...$.

حل: (1) این یک سری هندسی با جمله اول $a=\frac{2}{3}$ و قدر نسبت $r=\frac{1}{2}$ است. بنابراین سری همگراست و حاصلجمع آن عبارت است از

$$s=\frac{a}{1-r}=\frac{\frac{2}{3}}{1-\frac{1}{2}}=\frac{4}{3}.$$

(2) این سری از روی سری همساز با حذف ده جمله اول در سری همساز بدست آمده است. حال می‌توان گفت که این سری واگراست. زیرا اگر این سری همگرا بوده و مقدار آن σ باشد آنگاه $s=1+\frac{1}{2}+...+\frac{1}{10}+\sigma$ حاصلجمع سری همساز خواهد شد و این با واگرا بودن سری همساز متناقض است. بنابراین سری مفروض واگراست.

(3) جمله عمومی سری $a_n=\frac{n}{3n-1}$ است. چون

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{3n-1}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{3-\frac{1}{n}}=\frac{1}{3}$$

یعنی $\lim\limits_{n\to\infty}a_n\neq 0$ پس بنابر قضیه ۱ سری واگراست.

(4) در اینجا جمله عمومی به صورت $a_n=0.5+(0.1)^n$ است و از آنجایی که $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0.5\neq 0$ پس سری واگراست.

۸ . ۳ سری‌های نامنفی، ملاک‌های مقایسه و انتگرال

سری نامتناهی

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$$

یک **سری نامنفی** نامیده می‌شود هرگاه تمامی جملاتش نامنفی باشند، یعنی، هرگاه به ازای هر $a_n \ge 0, n = 1,2,\ldots$. هر حاصلجمع جزئی $s_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ از سری نامنفی $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ مجموع یک تعداد متناهی از اعداد نامنفی است، و بنابراین خود عددی نامنفی است. به علاوه $\{s_n\}$ یک دنباله صعودی است، زیرا

$$s_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n \le a_1 + a_2 + \ldots + a_n + a_{n+1} = s_{n+1} \qquad (n = 1,2,\ldots).$$

ملاحظات فوق منجر به گزاره زیر می‌شود، که در مطالعه سری‌های نامنفی اهمیتی اساسی دارد.

قضیه ۵: (معیار همگرایی برای سری‌های نامنفی)

سری نامنفی $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ همگراست هرگاه دنباله $\{s_n\}$ از حاصلجمع های جزئی آن دارای یک کران بالا باشد، یعنی هرگاه عددی مانند $c > 0$ وجود داشته باشد به طوری که به ازای هر n،

$$s_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n \le c.$$

اگر چنین عددی وجود نداشته باشد، سری واگراست.

اثبات. اگر $\{s_n\}$ دارای یک کران بالا باشد، آنگاه $\{s_n\}$ دنباله‌ای صعودی و کراندار است. اما در این صورت، بنابر قضیه ۵ در فصل اول، دنباله $\{s_n\}$ و لذا سری $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ همگراست. از طرف دیگر، اگر $\{s_n\}$ از بالا کراندار نباشد، آنگاه s_n از هر عدد مفروض $c > 0$، برای مقادیر بقدر کافی بزرگ n، بزرگتر می‌گردد، به طوری که $s_n \to \infty$ وقتی $n \to \infty$. در این حالت $\{s_n\}$ واگراست و بنابراین سری $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ نیز واگرا است.

مثال ۱۴: عدد اعشاری نامختوم $0.\ c_1 c_2 \ldots c_n \ldots$، که در آن برای هر n، $0 \le c_n \le 9$، شکل خلاصه شده سری نامتناهی

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{10^n} = \frac{c_1}{10} + \frac{c_2}{10^2} + \ldots + \frac{c_n}{10^n} + \ldots \qquad (1)$$

است. نشان دهید که هر سری به این شکل همگرا است، همانطور که به طور تلویحی این موضوع را پذیرفته‌ایم.

حل. سری (1) نامنفی است، وبنابراین ، بنابرقضیه ۵، همگرا است به شرط آنکه بتوانیم نشان دهیم دنباله $\{s_n\}$ از حاصلجمع‌های جزئی آن دارای یک کران بالاست. اما این مطلب درست است، زیرا برای هر n

$$s_n=\frac{c_1}{10}+\frac{c_2}{10^2}+\ldots+\frac{c_n}{10^n}\le\frac{9}{10}+\frac{9}{10^2}+\ldots+\frac{9}{10^n}$$
$$=\frac{9}{10}\left[1+\frac{1}{10}+\ldots+\left(\frac{1}{10}\right)^{n-1}\right]=\frac{9}{10}\frac{1-\left(\frac{1}{10}\right)^n}{1-\frac{1}{10}}=1-\left(\frac{1}{10}\right)^n<1.$$

علیرغم توفیقی که برای یافتن مقدار حاصلجمع‌های سری‌های مشخصی، در ۸ . ۱ بدست آوردیم، معمولاً این کار بسیار مشکل و شاید غیر ممکن باشد که بتوانیم مقدار دقیق حاصلجمع یک سری همگرا را بدست آوریم. خوشبختانه در بسیاری از موارد تنها اطلاع از همگرایی یک سری برای ما کفایت می‌کند و نیازی به یافتن مقدار دقیق آن نیست. بنابراین هدف اولیه ما توسعه ملاک‌هایی است که اجازه می‌دهد در مورد همگرایی یا واگرایی یک سری تصمیم بگیریم. با استفاده از قضیه ۵، ملاکی می‌سازیم که در آن همگرایی یک سری، همگرایی سری دیگری را مشخص می‌نماید.

قضیه ۶ (ملاک مقایسه): فرض کنیم $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ و $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ دو سری نامنفی باشند به طوری که برای n های بقدر کافی بزرگ، $a_n\le b_n$. در این صورت

(i) اگر $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ همگرا باشد آنگاه $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ نیز همگراست؛

(ii) اگر $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ واگرا باشد آنگاه $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ نیز واگراست.

اثبات. می‌توانیم فرض کنیم که نامساوی $a_n\le b_n$ برای هر n برقرار است. زیرا بسادگی دیده می‌شود که دو سری که تنها در یک تعداد متناهی از جملات با هم اختلاف دارند یا هر دو همگرا هستند و یا هر دو واگرا. فرض کنیم حاصلجمع‌های جزئی nام سری‌های $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ و $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ به ترتیب s_n, t_n باشند. در این صورت به ازای هر n،

$$s_n=a_1+a_2+\ldots+a_n\le b_1+b_2+\ldots+b_n=t_n\,.$$

اگر $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ همگرا به حاصلجمع T باشد آنگاه به ازای هر n، $t_n\le T$ و بنابراین، چون $s_n\le t_n$، داریم $s_n\le T$. از قضیه ۵ نتیجه می‌شود که $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ نیز همگراست. به دلیل مشابه اگر $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ واگرا

باشد، آنگاه $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ نیز واگراست، زیرا، همانطور که در بالا نشان داده شد، همگرایی $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$، همگرایی $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ را نتیجه می‌دهد و بدین ترتیب اثبات تمام است.

برای دو سری مفروض $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ و $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$، می‌گوییم $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ **غالب بر** $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ است (سری $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ **مغلوب** $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ است) در صورتی که برای مقادیر بقدر کافی بزرگ n داشته باشیم $b_n \geq a_n$. لذا بنابر قضیه ۶، سری مغلوب یک سری همگرا خودش نیز همگراست، درحالی که سری غالب بر یک سری واگرا خودش هم واگراست. در اینجا، مانند هر جای دیگر در این بخش، سری‌های مورد بحث نامنفی فرض شده‌اند.

مثال ۱۵: همگرایی سری‌های زیر را بررسی کنید:

(i) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$ $\qquad$ (ii) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ که در آن $p<1$.

حل. (i) سری

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = 1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\ldots+\frac{1}{n!}+\ldots \qquad (2)$$

(بنابر قرارداد $0!=1$) مغلوب سری

$$1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{2^n}+\ldots \qquad (3)$$

است. برای تأیید این موضوع، ملاحظه می‌کنیم که هر چند نامساوی $n!>2^n$ برای $n=0,1,2,3$ برقرار نمی‌باشد اما برای هر $n \geq 4$ درست است، لذا از جمله پنجم به بعد هر جمله در سری (2) از جمله نظیرش در سری (3) کمتر است. اما سری (3) همگراست، زیرا از جمله دوم به بعد یک سری هندسی با جمله اول $a=1$ و قدر نسبت $q=\frac{1}{2}$ (و لذا حاصلجمع $\frac{a}{1-q}=\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=2$) است و در حقیقت دارای حاصلجمع 3 می‌باشد. لذا، بنابر ملاک مقایسه، سری (2) نیز همگراست، و همانطور که بعداً نشان خواهیم داد حاصلجمع آن برابر با e است.

(ii) فرض کنیم p عددی کوچکتر از 1 باشد. در این صورت، چون $1^p=1$ و n^x برای $n \geq 2$ تابعی صعودی از x است،داریم

$$n^p \leq n \qquad (n=1,2,\ldots),$$

یا معادل با آن

$$\frac{1}{n} \leq \frac{1}{n^p} \qquad (n=1,2,\ldots).$$

بنابراین، اگر $p<1$ آنگاه سری

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}=1+\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}+\ldots+\frac{1}{n^p}+\ldots,$$

که **سری-** p نامیده می‌شود، غالب بر سری همساز (هارمونیک)

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}+\ldots$$

است و بنابراین، با توجه به قضیه ۶، واگرا می‌باشد. در حقیقت، سری- p واگراست هرگاه $p\le 1$ ، زیرا برای $p=1$ به سری همساز تبدیل می گردد. در آتیه نشان خواهیم داد که سری- p همگراست هرگاه $p>1$.

از قضیه ۶ می‌توان حتی ملاک مقایسه مفیدتر زیر را نتیجه گرفت.

قضیه ۷(ملاک مقایسه حدی): فرض کنیم $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ و $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ دو سری با جملات مثبت باشند به طوری که

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=L, \qquad (4)$$

که در آن حالت $L=\infty$ مجاز است. در این صورت همگرایی $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ همگرایی $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ را نتیجه می‌دهد هرگاه $0\le L<\infty$، در حالیکه واگرایی $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ واگرایی $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ را نتیجه می‌دهد هر گاه $L>0$ یا $L=\infty$. به ویژه، اگر L عدد مثبتی باشد دو سری $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ و $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ یا هر دو همگرا و یا هر دو واگرا هستند.

اثبات. چون a_n, b_n مثبت هستند، خارج قسمت $\frac{a_n}{b_n}$ و وارون آن $\frac{b_n}{a_n}$ به ازای هر n تعریف شده‌اند. فرض کنیم (4) با شرط $0\le L<\infty$ برقرار باشد (بدیهی است که L نمی‌تواند منفی باشد). در این صورت ، به ازای هر $\varepsilon>0$ عددی طبیعی مانند N وجود دارد به طوری که به ازای هر $n>N$،

$$\frac{a_n}{b_n}<L+\varepsilon,$$

یا به عبارت معادل،

$$a_n<(L+\varepsilon)b_n.$$

اگر $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ همگرا باشد آنگاه سری نامنفی $\sum_{n=1}^{\infty}(L+\varepsilon)b_n$، که از ضرب جملات $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ در عامل مثبت $L+\varepsilon$ بدست می‌آید، نیز همگراست و در این صورت همگرایی $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ از قضیه ۶ نتیجه

می‌شود. از طرف دیگر،اگر $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ واگرا بوده و $L>0$ یا $L=\infty$، آنگاه به دلیل آنکه کسر وارون $\frac{b_n}{a_n}$ وقتی $n\to\infty$ به حدی نامنفی میل می‌کند (مساوی با 0 است هرگاه $L=\infty$)، سری $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ نیز واگراست، زیرا در غیر این صورت، همانطور که در بالا نشان داده شد، $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ بایستی همگرا باشد که متناقض با فرض است.

مثال ۱۶: همگرایی سری‌های زیر را بررسی نمائید:

(i) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ $\quad(ii)$ $\sum_{n=1}^{\infty}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$ $\quad(iii)$ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+2}{\sqrt{n^3+n}}$

(iv) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{\sqrt{n^6+n^2}}$.

حل. (i) فرض کنیم $a_n=\frac{1}{n^2}$ و سری $\sum_{n=1}^{\infty} b_n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$ را در نظر می گیریم. ابتدا نشان می دهیم که سری $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$ همگراست و حاصلجمع آن را پیدا می کنیم. به سادگی دیده می شود که

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right).$$

حاصلجمع جزئی n ام این سری برابر است با

$$\begin{aligned}s_n&=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\\&=1+\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)+\left(-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\right)+\ldots+\left(-\frac{1}{n}+\frac{1}{n}\right)-\frac{1}{n+1}=1-\frac{1}{n+1}.\end{aligned}$$

بنابراین

$$\lim_{n\to\infty} s_n=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=1,$$

که از آن نتیجه می‌شود سری مفروض همگرا بوده و حاصلجمع آن مساوی 1 است.

سری $\sum_{n=1}^{\infty} a_n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ سری $-p$ برای $p=2$ است. اکنون داریم

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n(n+1)}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n(n+1)}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)=1\,.$$

لذا، بنابر قضیه ۷، سری $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ نیز همگراست.

(ii)ابتدا به صورت مستقیم نشان می دهیم که سری $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$ واگرا است. چون

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \ln\frac{n+1}{n} = \sum_{n=1}^{\infty}\left[\ln(n+1)-\ln n\right],$$

حاصلجمع جزئی n ام مساوی با

$$\begin{aligned} s_n &= (\ln 2-\ln 1)+(\ln 3-\ln 2)+\ldots+(\ln(n+1)-\ln n) \\ &= \ln(n+1)-\ln 1=\ln(n+1). \end{aligned}$$

اما

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty}\ln(n+1)=\infty,$$

و بنابراین سری مفروض واگراست.

حال اگر $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ آنگاه

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{a_n} &= \lim_{n\to\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}} = \lim_{x\to\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}} \\ &= \lim_{u\to 0^+}\frac{\ln(1+u)}{u} = \lim_{u\to 0^+}\frac{\left[\ln(1+u)\right]'_u}{u'_u} = \lim_{u\to 0^+}\frac{\frac{1}{1+u}}{1} \\ &= \lim_{u\to 0^+}\frac{1}{u+1}=1, \end{aligned}$$

که ازتغییر متغیر $u=\frac{1}{x}$ و دستور هوپیتال استفاده نموده‌ایم. بنابراین، با استفاده از قضیه ۷ و واگرا بودن سری همساز، نتیجه می‌گیریم که سری $\sum_{n=1}^{\infty}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$ نیز واگرا است. توجه کنید که چون در ابتدا به طور مستقیم نشان دادیم که این سری واگراست، می‌توان با استفاده از قضیه ۷ نشان داد که سری همساز واگراست.

(iii) فرض کنیم $a_n=\frac{n+2}{\sqrt{n^3+n}}$ و $b_n=\frac{1}{n}$ در این صورت

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{n^2+2n}{\sqrt{n^3+n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{n^2+2n}{\sqrt{n^3\left(1+\frac{1}{n^2}\right)}} = \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}+\frac{2}{\sqrt{n}}}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}}=\infty,$$

و چون سری $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ سری همساز و واگراست، از قضیه ۷ نتیجه می‌گیریم که سری $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ نیز واگراست.

(iv)فرض کنیم $a_n = \frac{2n+1}{\sqrt{n^6+n^2}}$ و $b_n = \frac{1}{n^2}$ در این صورت

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2(2n+1)}{\sqrt{n^6+n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^3\left(2+\frac{1}{n}\right)}{\sqrt{n^6\left(1+\frac{1}{n^4}\right)}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2+\frac{1}{n}}{\sqrt{1+\frac{1}{n^4}}} = 2,$$

و چون سری $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$، بنابر (i)، همگراست، لذا از قضیه ۷ نتیجه می‌گیریم که سری $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ نیز همگراست.

ملاک همگرایی بعدی اغلب به ما این امکان را می‌دهد که همگرایی یا واگرایی یک سری نامتناهی را از روی همگرایی یا واگرایی انتگرال توسعی وابسته به آن نتیجه بگیریم.

قضیه ۸ (ملاک انتگرال): فرض کنیم $f(x)$ یک تابع مثبت پیوسته باشد که بر بازه $1 \le x < \infty$ نزولی است،و فرض کنیم به ازای هر $n = 1,2,...$, $a_n = f(n)$. در این صورت سری

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + ... + a_n + ...$$

و انتگرال توسعی

$$\int_1^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{u\to\infty} \int_1^{u} f(x)\,dx \qquad (5)$$

یا هر دو همگرا و یا هر دو واگرا هستند.

اثبات. در شکل (a) مساحت زیر منحنی $y = f(x)$ از $x = 1$ تا $x = n+1$ کمتر از مساحت کل ناحیه هاشورزده مستطیل‌های محیطی است، و بنابراین

$$\int_1^{n+1} f(x)\,dx < a_1 + a_2 + ... + a_n = s_n\,, \qquad (6)$$

که در آن s_n حاصلجمع جزئی n ام سری $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ می‌باشد. در شکل دیگر (b) مساحت زیر منحنی $y = f(x)$ از $x = 1$ تا $x = n$ بیشتر از مساحت کل ناحیه‌ها هاشور زده مستطیل‌های محاطی است، لذا این بار

$$a_2 + a_3 + ... + a_n < \int_1^{n} f(x)\,dx. \qquad (7)$$

فرض کنیم انتگرال توسعی (5) واگرا باشد. در این صورت چون $f(x)$ مثبت است، واگرایی تنها بدین معنی است که حد در (5) برابر با ∞ است. لذا وقتی $n\to\infty$، طرف چپ (6) به سمت ∞ میل خواهد کرد، و بنابراین طرف راست آن s_n نیز به سمت ∞ میل می‌کند، یعنی، $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ واگراست. از طرف دیگر، فرض کنیم (5) همگرا به حد L باشد. در این صورت، با توجه به (7)، به ازای هر n،

$$s_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n < a_1 + \int_1^n f\left(x\right)dx < a_1 + L.$$

بنابراین حاصلجمع‌های جزئی سری نامنفی $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ دارای یک کران بالاست. پس بنابر قضیه ۵، سری $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ همگرا بوده و اثبات تمام است.

شکل ۸ . ۲

مثال ۱۷: همگرایی سری‌های زیر را بررسی کنید:

(i) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ $\quad(ii)$ $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln n}$ $\quad(iii)$ $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\left(\ln n\right)^2}$

(iv) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{n}$.

حل. (i) سری

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p} = 1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \ldots \frac{1}{n^p} + \ldots$$

سری $p-$ است. ثابت می‌کنیم که این سری به ازای $p>1$ همگرا و به ازای $p\le 1$ واگراست.

در جمله عمومی سری n را به x تغییر داده و تابع پیوسته $\frac{1}{x^p}$ را بدست می‌آوریم که بر $[1,\infty]$ نزولی است هر گاه $p>0$، لذا ملاک انتگرال را می‌توان بکار برد. برای $p=1$ داریم $\frac{1}{x^p}=\frac{1}{x}$ و

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x}=\lim_{u\to\infty}\int_1^u \frac{dx}{x}=\lim_{u\to\infty}\ln x\Big|_1^u=\lim_{u\to\infty}\ln u=\infty,$$

در حالیکه برای $0<p<1$ یا $p>1$،

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x^p}=\lim_{u\to\infty}\int_1^u \frac{dx}{x^p}=\lim_{u\to\infty}\frac{x^{1-p}}{1-p}\Big|_1^u=\lim_{u\to\infty}\left(\frac{u^{1-p}}{1-p}-\frac{1}{1-p}\right).$$

اما بسادگی ثابت می‌شود،

$$\lim_{u\to\infty}\left(\frac{u^{1-p}}{1-p}-\frac{1}{1-p}\right)=\begin{cases}\frac{1}{p-1}\ , & p>1\\ \infty & ,0<p<1.\end{cases}$$

لذا، بنابر ملاک انتگرال، سری $p-$ همگراست هرگاه $p>1$ و واگراست هرگاه $0<p\le 1$. اگر $p\le 0$، آنگاه جمله n ام $\frac{1}{n^p}$ وقتی $n\to\infty$، به 0 میل نمی‌کند و لذا، بنابر قضیه ۱، سری $p-$ واگراست. از آنچه گفته شد نتیجه می‌گیریم که سری $p-$ به ازای $p>1$ همگرا و به ازای $p\le 1$ واگراست.

(ii) سری $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln n}$، بنابر ملاک انتگرال، واگراست، زیرا انتگرال توسعی (ناسره) وابسته به آن واگراست:

$$\int_2^\infty \frac{dx}{x\ln x}=\lim_{u\to\infty}\int_2^u \frac{dx}{x\ln x}=\lim_{u\to\infty}\ln(\ln x)\Big|_2^u=\lim_{u\to\infty}[\ln(\ln u)-\ln(\ln 2)]=\infty.$$

در اینجا ، چون $\frac{1}{n\ln n}$ برای $n=1$ تعریف نشده است، ما بجای 1 عدد 2 را برای حد پایین حاصلجمع و حد پایین انتگرال گیری انتخاب نمودیم.

(iii) سری $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n(\ln n)^2}$، بنا بر ملاک انتگرال ، همگراست ، زیرا انتگرال توسعی وابسته به آن همگراست:

$$\int_2^\infty \frac{dx}{x(\ln x)^2}=\lim_{u\to\infty}\int_2^u \frac{dx}{x(\ln x)^2}=\lim_{u\to\infty}\left[-\frac{1}{\ln x}\right]_2^u=\lim_{u\to\infty}\left(\frac{1}{\ln 2}-\frac{1}{\ln u}\right)=\frac{1}{\ln 2}.$$

(iv) تابع $f(x)=\frac{\ln x}{x}$ را در نظر می گیریم.این تابع به ازای $x>1$ نا منفی و پیوسته است. مشتق تابع عبارت است از $f'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}$. به ازای $x>e$ مشتق منفی است و بنابراین تابع $f(x)$ نزولی است. به دلیل آنکه یک تعداد متناهی از جملات اولیه سری تأثیری در همگرایی (یا

واگرایی) آن ندارد می‌توان همگرایی سری $\sum_{n=3}^{\infty}\frac{\ln n}{n}$ را بررسی نمود. اما در این وضعیت تابع $\frac{\ln x}{x}$ بر بازه $[3,\infty)$ نزولی است و می‌توان از ملاک انتگرال استفاده نمود. بهر حال

$$\int_1^{\infty}\frac{\ln x}{x}dx=\lim_{u\to\infty}\int_1^{u}\frac{\ln x}{x}dx=\lim_{u\to\infty}\left[\frac{(\ln x)^2}{2}\right]_1^u$$
$$=\lim_{u\to\infty}\frac{(\ln u)^2}{2}=\infty$$

و بنابراین سری $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{n}$ واگراست.

۸ . ۴ همگرایی مطلق و مشروط

بخش قبل به بررسی سری‌های نامنفی اختصاص داده شد، یعنی سری‌هائی که تمامی جملات آن‌ها نامنفی است. اکنون به مطالعه سری‌های دلخواه باز می‌گردیم، سری‌هائی که ممکن است هم دارای جملات مثبت و هم دارای جملات منفی باشند. سری

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=a_1+a_2+\ldots+a_n+\ldots \qquad (1)$$

همگرای مطلق نامیده می‌شود هرگاه سری وابسته به آن

$$\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|=|a_1|+|a_2|+\ldots+|a_n|+\ldots \qquad (1')$$

که جملاتش قدر مطلق جملات سری (1) هستند، همگرا باشد. اهمیت واقعی همگرایی مطلق در بحث با سری‌هایی است که توأماً دارای جملات مثبت و منفی هستند (و در حقیقت به تعداد نامتناهی جملات مثبت و منفی دارند)، زیرا یک سری همگرا از این نوع ممکن است همگرای مطلق باشد یا نباشد. به عبارت دقیقتر، همانطور که در لحظاتی دیگر خواهیم دید، هر چند که یک سری همگرای مطلق بایستی همگرا باشد، اما یک سری می‌تواند همگرا بوده ولی همگرای مطلق نباشد.

مثال ۱۸: همگرایی و همگرایی مطلق سری‌های زیر را بررسی کنید:

$$(i)\ \sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{2}{3}\right)^n \qquad (ii)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}.$$

حل. (i) سری هندسی

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{2}{3}\right)^n=1-\frac{2}{3}+\frac{4}{9}-\frac{8}{27}+\ldots \qquad (2)$$

همگرا به حاصلجمع $\frac{3}{5}=\frac{1}{1-\left(-\frac{2}{3}\right)}$ است (در سری هندسی $a=1$ و $r=-\frac{2}{3}$ قرار دهید). این سری همچنین همگرای مطلق است زیرا

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left|\left(-\frac{2}{3}\right)^n\right|=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n=1+\frac{2}{3}+\frac{4}{9}+\frac{8}{27}+\dots \qquad (2')$$

سری هندسی دیگری است، این بار نامنفی، با حاصلجمع $\frac{1}{1-\frac{2}{3}}=3$.

(ii) سری

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\dots \qquad (3)$$

که به **سری همساز متناوب** معروف است، همگرای مطلق نیست زیرا

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{(-1)^{n-1}}{n}\right|=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\dots \qquad (3')$$

سری معمولی همساز است که البته واگراست، علیرغم این که سری (3) همگرای مطلق نمی‌باشد، همگراست. این مطلب در مثال ۲۰ به کمک ملاک همگرایی خاصی نشان داده خواهد شد.

همانطور که در ابتدای این بخش گفته شد (و در مثال بالا به هم توضیح آن پرداختیم)، سری‌هایی وجود دارند که همگرا بوده ولی همگرای مطلق نمی‌باشند. یک چنین سری‌هایی را **همگرای مشروط** می‌نامند. وجود سری‌های همگرای مشروط نشان می‌دهد که همگرایی یک سری، همگرایی مطلق آن را نتیجه نمی‌دهد. از طرف دیگر، همانطور که در قضیه بعد نشان داده شده است، یک سری همگرای مطلق، بایستی همگرا باشد.

قضیه ۹: فرض کنیم $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ یک سری باشد به طوری که سری $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ همگراست. در این صورت سری $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ نیز همگراست.

اثبات. فرض کنیم سری $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ همگرا باشد. سری

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n+|a_n|\right) \qquad (4)$$

نا منفی است، به دلیل آنکه

$$a_n+|a_n|=\begin{cases}2a_n=2|a_n|, & a_n\ge 0\\ 0, & a_n<0\end{cases}$$

و به علاوه (4) سری مغلوب سری همگرای $\sum_{n=1}^{\infty} 2|a_n|$ است. لذا از ملاک مقایسه (قضیه ۶) نتیجه می‌شود که سری (4) نیز همگرا است. اما در این صورت سری

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n + |a_n|\right) - \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$$

نیز همگراست، زیرا تفاضل دو سری همگرا خود یک سری همگرا می‌باشد (قضیه ۳).

مثال ۱۹: همگرایی مطلق سری‌های زیر را بررسی کنید:

$$1+\frac{1}{2}-\frac{1}{4}-\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}-\frac{1}{64}-\frac{1}{128}+\dots, \quad (5) \qquad (i)$$

$$\frac{\sin\alpha}{1^2}+\frac{\sin 2\alpha}{2^2}+\frac{\sin 3\alpha}{3^2}+\dots+\frac{\sin n\alpha}{n^2}+\dots, \quad (6) \qquad (ii)$$

که در آن α عدد حقیقی دلخواهی است.

حل. (i) سری

$$1+\frac{1}{2}-\frac{1}{4}-\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}-\frac{1}{64}-\frac{1}{128}+\dots$$

از روی سری هندسی

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\frac{1}{64}+\frac{1}{128}+\dots \qquad (5')$$

با تغییر علامت‌های جفت‌های جملات، با شروع از جمله سوم و چهارم بدست آمده است. چون $(5')$ یک سری همگرا (با حاصلجمع 2) است سری (5) همگرای مطلق و بنابراین با توجه به قضیه ۹، همگرا است.

(ii) سری‌های

$$\left|\frac{\sin\alpha}{1^2}\right|+\left|\frac{\sin 2\alpha}{2^2}\right|+\left|\frac{\sin 3\alpha}{3^2}\right|+\dots+\left|\frac{\sin n\alpha}{n^2}\right|+\dots \qquad (6')$$

و

$$\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\dots+\frac{1}{n^2}+\dots \qquad (7)$$

را در نظر می‌گیریم. سری (7) یک سری-p با مقدار $p=2$ است و لذا بنابر مثال ۱۷ (i) همگراست. جملات سری $(6')$ از جملات نظیر در سری (7) بیشتر نیست و لذا بنابر قضیه ۶ (ملاک مقایسه) سری $(6')$ نیز همگراست. اکنون بر قضیه ۹، سری (6) همگرای مطلق و بنابراین همگراست.

یک سری نامتناهی **متناوب** نامیده می‌شود هرگاه جملات آن متناوباً مثبت و منفی باشند، یعنی، هرگاه جملات متوالی آن همواره دارای علامت‌های مختلف باشند. بدیهی است که هر سری متناوب را می‌توان به یکی از دو شکل زیر نمایش داد:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1} a_n = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \ldots$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n} a_n = -a_1 + a_2 - a_3 + a_4 - \ldots,$$

که در آن اعداد $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ همگی مثبت هستند. توجه کنید که در اولین این شکل‌ها می‌توانستیم $(-1)^{n+1} a_n$ را بجای $(-1)^{n-1} a_n$ بکار بریم.

برای سری‌های متناوب ملاک همگرایی مهم زیر را که به لایبنیتز نسبت داده می‌شود، داریم.

قضیه ۱۰ (ملاک لایبنیتز برای سری‌های متناوب): اگر $\{a_n\}$ دنباله‌ای اکیداً نزولی با جملات مثبت باشد به طوری که

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0, \qquad (8)$$

آنگاه سری متناوب

$$a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \ldots + (-1)^{n-1} a_n + \ldots \quad (9)$$

همگراست.

اثبات. شرط (8) ضروری است، زیرا عدم برقراری آن، بنابر قضیه 1، باعث واگرایی سری (9) می‌شود. فرض کنیم s_n حاصلجمع جزئی nام سری باشد. در این صورت حاصلجمع جزئی با اندیس زوج را می‌توان به شکل

$$s_{2k} = (a_1 - a_2) + (a_3 - a_4) + \ldots + (a_{2k-1} - a_{2k})$$

نوشت که در آن طرف راست حاصلجمع مثبت است، به دلیل آنکه $a_n > a_{n+1}$ و بنابراین به ازای هر n، $a_n - a_{n+1} > 0$. لذا حاصلجمع‌های با اندیس زوج همگی مثبت بوده و دنباله اکیداً صعودی $s_2, s_4, \ldots, s_{2k}, \ldots$ را تشکیل می‌دهند. این دنباله کراندار هم می‌باشد، زیرا

$$s_{2k} = a_1 - (a_2 - a_3) - \ldots - (a_{2k-2} - a_{2k-1}) - a_{2k} < a_1$$

(اعداد کم شده $a_2 - a_3, \ldots, a_{2k-2} - a_{2k-1}, a_{2k}$ همگی مثبت هستند).

لذا، بنابر قضیه ۵ در فصل اول، دنباله $s_2, s_4, \ldots, s_{2k}, \ldots$ دارای حد متناهی s است، یعنی،

$$\lim_{k\to\infty} s_{2k} = s,$$

که در آن s به طور بدیهی عددی مثبت است. اما برای حاصلجمع‌های با اندیس فرد، داریم

$$s_{2k+1}=s_{2k}+a_{2k+1}$$

و بنابراین، با توجه به (8)،

$$\lim_{k\to\infty}s_{2k+1}=\lim_{k\to\infty}s_{2k}+\lim_{k\to\infty}a_{2k}=s+0=s,$$

چون حاصلجمع‌های با اندیس‌های زوج و فرد هر دو به یک حد s میل می‌کند، سری (9)همگرا به حاصلجمع s است.

مثال ۲۰: همگرایی سری‌های زیر را بررسی کنید:

$$(i)\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^p}\qquad (ii)\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}\qquad (iii)\quad \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}.$$

حل. (i) اگر $p>0$،دنباله $\left\{\frac{1}{n^p}\right\}$ اکیداً نزولی و همگرا به 0 است. لذا، بنابر قضیه ۱۰، سری متناوب

$$1-\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}-\frac{1}{4^p}+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n^p}+\ldots \qquad (10)$$

همگراست. اگر $p>1$،سری همگرای مطلق است، زیرا سری

$$1+\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}+\frac{1}{4^p}+\ldots+\frac{1}{n^p}+\ldots\ , \qquad (10')$$

که جملاتش قدر مطلق جملات سری متناوب (10) هستند، یک سری $p-$ همگراست. بهر حال، اگر $0<p\le 1$، سری $(10')$ یک سری $p-$ واگراست، و در این حالت سری (10) همگرای مطلق نبوده بلکه فقط همگرای مشروط است. برای $p=1$ سری همساز متناوب

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n}+\ldots,$$

را بدست می آوریم که قبلا در مثال ۱۸ از آن صحبت شد.

(ii) سری متناوب

$$1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{1}{2n-1}+\ldots, \qquad (11)$$

در شرایط قضیه ۱۰ صدق کرده و بنابراین همگراست. با وجود این، سری

$$1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\ldots+\frac{1}{2n-1}+\ldots, \qquad (11')$$

که جملاتش قدر مطلق جملات سری (11) هستند، واگراست. در حقیقت،

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{2n-1}}{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2n-1}=\frac{1}{2},$$

لذا واگرایی $(11')$ از روی واگرایی سری همساز $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$، به کمک قضیه ۷ (ملاک مقایسه حدی)، بدست می‌آید. بنابراین سری (11) همگرای مشروط است.

(iii) سری متناوب

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}=1-1+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}-\frac{1}{5!}+\dots \qquad (12)$$

بنابر قضیه ۱۰ همگراست، اما همگرایی آن را می‌توان از این مطلب نتیجه گرفت که سری (12) همگرای مطلق است، زیرا سری

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}=1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\frac{1}{5!}+\dots \qquad (12')$$

، همانطور که در مثال ۱۵ نشان داده شد، همگراست.

۸. ۵ ملاک‌های دالامبر و کوشی

اکنون دو ملاک همگرایی دیگر ارائه می‌دهیم. این ملاک‌ها بسیار مهم بوده و ابزاری ضروری در بررسی سری‌های توانی هستند که در بخش بعد به آن می‌پردازیم. معمولاً **ملاک دالامبر** را **ملاک خارج قسمت** و **ملاک کوشی** را **ملاک ریشه** نیز می‌نامند.

قضیه ۱۱ (ملاک خارج قسمت): فرض کنیم $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ یک سری با جملات غیر صفر باشد به طوری که

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=L \qquad (1)$$

که در آن ممکن است $L=\infty$. در این صورت سری همگرای مطلق است هرگاه $0\le L<1$ و واگراست هرگاه $L>1$ یا $L=\infty$. ملاک بدون نتیجه قطعی است هرگاه $L=1$.

اثبات. فرض کنیم (1) با شرط $0\le L<1$ برقرار باشد (واضح است که L نمی‌تواند منفی باشد)، و فرض کنیم r عدد دلخواهی در بازه باز $(L,1)$ باشد. در این صورت با توجه به (1)، برای هر n بزرگتر یا مساوی عددی طبیعی مانند N داریم

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|<r<1.$$

بنابراین

$$|a_{N+1}|<|a_N|\,r,$$
$$|a_{N+2}|<|a_{N+1}|\,r<|a_N|\,r^2,$$

$$|a_{N+3}| < |a_{N+2}|r < |a_N|r^3,$$

به طور کلی

$$|a_{N+n}| < |a_N|r^n \qquad (n = 1, 2, \ldots), \qquad (2)$$

در نتیجه

$$|a_{N+1}| + |a_{N+2}| + |a_{N+3}| + \ldots < |a_N|r + |a_N|r^2 + |a_N|r^3 + \ldots$$
$$= |a_N|r(1 + r + r^2 + \ldots).$$

سری طرف راست همگراست، زیرا یک سری هندسی همگراست،و بنابراین سری سمت چپ نیز همگراست(با استفاده از قضیه ۶ (ملاک مقایسه)). اما در این صورت $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ همگراست، زیرا حذف یک تعداد متناهی از جملات سری تاثیری در همگرائی یا واگرائی آن ندارد. به عبارت دیگر سری $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ همگرای مطلق است.

در مرحله بعد فرض می کنیم $L > 1$ یا $L = \infty$ ، فرض کنیم r عدد دلخواهی در بازه باز $(1, L)$ باشد هرگاه $L > 1$ یا در بازه $(1, \infty)$ باشد هرگاه $L = \infty$. با توجه به (1) ، اکنون عددی طبیعی مانند N وجود دارد به طوری که با ازای هر $n \geq N$ داریم،

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| > r > 1,$$

و بجای (2) بدست آوریم

$$|a_{N+n}| > |a_N|r^n \qquad (n = 1, 2, \ldots), \qquad (2')$$

با همان استدلال قسمت قبل و برگرداندن جهت همه نامساوی ها . اما در این صورت

$$|a_{N+n}| > |a_N| > 0 \qquad (n = 1, 2, \ldots),$$

که این با شرط لازم $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ برای همگرائی سری $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ نا سازگار است، بنابراین سری $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ واگرا است.

بالاخره، برای این که نشان دهیم ملاک بدون نتیجه قطعی است هرگاه $L = 1$ ، آن را برای سری های

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$$

بکار می بریم. به سادگی دیده می شود که برای هر سه سری ، $L = 1$. با وجود این ، اولین سری همگرای مطلق است، دومین سری همگرای مشروط و سومین سری واگراست.

مثال ۲۱ : همگرائی سری های زیر را بررسی کنید:

$(i)\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}\qquad (ii)\quad \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{n!}{n^n}\qquad (iii)\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n)!}{(n!)^2}\qquad (iv)\quad \sum_{n=1}^{\infty}n!.$

حل . (i) اگر $a_n=\frac{1}{n!}$ قرار دهیم آنگاه

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{(n+1)!}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}=0$$

بنابراین سری مفروض همگراست.

(ii) سری $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{n!}{n^n}$ همگرای مطلق است، زیرا

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}.\frac{n^n}{n!}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^n}{(n+1)^n}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(1+\frac{1}{n})^n}=\frac{1}{e}\approx 0.37<1.$$

(iii) سری $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n)!}{(n!)^2}$ واگراست،زیرا

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(2n+2)!}{[(n+1)!]^2}.\frac{(n!)^2}{(2n)!}=\lim_{n\to\infty}\frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)(n+1)}=4>1.$$

(iv) این سری مثالی از حالت $L=\infty$ می باشد، که می دانیم واگراست (وقتی $n\to\infty$ جمله n ام آن به 0 میل نمی کند)، و در حقیقت با استفاده از ملاک خارج قسمت داریم ،

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!}{n!}=\lim_{n\to\infty}(n+1)=\infty.$$

مثال ۲۲: همگرائی سری های زیر را بررسی کنید:

$(i)\quad \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n^3}{3^n}\qquad (ii)\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n^{10}}\qquad (iii)\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{10^n}{n!}.$

حل . (i) از $a_n=(-1)^n\frac{n^3}{3^n}$ نتیجه می شود که

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-1)^{n+1}(n+1)^3}{3^{n+1}}.\frac{3^n}{(-1)^n n^3}\right|=\frac{1}{3}\lim_{n\to\infty}(\frac{n+1}{n})^3=\frac{1}{3}<1$$

بنابراین سری $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n^3}{3^n}$ همگرای مطلق است.

(ii) ملاک خارج قسمت (دالامبر) را بکار می بریم. داریم $a_n=\frac{2^n}{n^{10}}, a_{n+1}=\frac{2^{n+1}}{(n+1)^{10}}$ لذا.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{2^{n+1}}{(n+1)^{10}}}{\frac{2^n}{n^{10}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n^{10}}{(n+1)^{10}}=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{(1+\frac{1}{n})^{10}}=2>1.$$

بنابراین سری واگراست.

(iii) داریم $a_n=\frac{10^n}{n!}$، $\quad a_{n+1}=\frac{10^{n+1}}{(n+1)!}$ و لذا

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{10^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{10^n}{n!}}=\lim_{n\to\infty}\frac{10}{n+1}=0<1.$$

بنابراین سری همگراست.

اثبات ملاک همگرائی بعد(ملاک کوشی) شبیه ملاک خارج قسمت ولی قدری ساده تر است.

قضیه ۱۲ (ملاک ریشه) : فرض کنیم $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ یک سری باشد به طوری که

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=L, \qquad (3)$$

که در آن ممکن است $L=\infty$. در این صورت سری همگرای مطلق است هرگاه $0\le L<1$ و واگراست هرگاه $L>1$ یا $L=\infty$. ملاک بدون نتیجه قطعی است هرگاه $L=1$.

اثبات. اگر $0\le L<1$ ، فرض می کنیم r عدد دلخواهی در بازه باز $(L,1)$ باشد. در این صورت ، با توجه به (3)، عددی طبیعی مانند N وجود دارد به طوری که به ازای هر $n\ge N$ ،

$$\sqrt[n]{|a_n|}<r<1,$$

یا معادل آن

$$|a_n|<r^n \qquad (n=N,N+1,\ldots). \qquad (4)$$

بنابراین

$$\begin{aligned}|a_N|+|a_{N+1}|+|a_{N+2}|+\ldots &< r^N+r^{N+1}+r^{N+2}+\ldots\\ &=r^N(1+r+r^2+\ldots),\end{aligned}$$

که در آن سری طرف راست یک سری همگرای هندسی است. لذا ، بنابر ملاک مقایسه ، سری $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ نیز همگراست ، یعنی ، سری $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ همگرای مطلق است. اگر $L>1$ یا $L=\infty$، فرض می کنیم که r عدد دلخواهی در بازه $(1,L)$ باشد. در این صورت بجای (4) داریم

$$|a_n|>r^n>1 \qquad (n=N.N+1,N+2,...) \qquad (4')$$

و بنابراین دنباله $\{a_n\}$ به صفر میل نمی کندو سری $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ واگراست. اگر $L=1$، ملاک ریشه بدون نتیجه قطعی است. این مطلب را می توان در مورد سه سری نشان داده شده در پایان اثبات ملاک خارج قسمت امتحان نمود. بدین ترتیب اثبات تمام است.

تبصره: در کاربرد ملاک ریشه در نظر داشته باشید که

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{c}=\lim_{n\to\infty}e^{\frac{1}{n}\ln c}=e^0=1$$

که در آن $c>0$ ، و به طریق مشابه

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=\lim_{n\to\infty}e^{\frac{1}{n}\ln n}=e^0=1.$$

مثال ۲۳ : همگرائی سری های زیر را بررسی کنید:

$$(i)\ \sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(\ln n)^n} \qquad (ii)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{3^n} \qquad (iii)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n^4} \qquad (iv)\ \sum_{n=1}^{\infty}n^n.$$

حل . (i) سری $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(\ln n)^n}$ همگرای مطلق است، زیرا

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|\frac{(-1)^{n-1}}{(\ln n)^n}\right|}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\ln n}=0.$$

(ii) سری $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{3^n}$ همگراست ، زیرا

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{n}{3^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{n}}{3}=\frac{1}{3}<1.$$

(iii) سری $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n^4}$ واگراست، زیرا

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{2^n}{n^4}}=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{(\sqrt[n]{n})^4}=2>1.$$

(iv) سری $\sum_{n=1}^{\infty}n^n$ واگرا ، متناظر به حالت $L=\infty$ ، است زیرا

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n^n}=\lim_{n\to\infty}n=\infty.$$

تبصره : در هنگام استفاده از ملاک کوشی ، فرمول زیر بسیار مفید به نظر می رسد:

$$n!=\sqrt{2\pi n}\,(\frac{n}{e})^n.e^{\frac{\theta}{12n}},\quad 0<\theta<1.$$

این فرمول به نام **فرمول استرلینگ** معروف بوده و برای مقادیر بزرگ n برقرار می باشد.

مثال ۲۴ : همگرائی سری های زیر را بررسی کنید:

$$(i)\quad \sum_{n=1}^{\infty}(\frac{2n+5}{3n-1})^{2n-1}\qquad (ii)\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n.n!}{n^n}\qquad (iii)\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}(1+\frac{1}{n})^{n^2}.$$

حل . (i) داریم $a_n=(\frac{2n+5}{3n-1})^{2n-1}$، بنابراین

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=\lim_{n\to\infty}(\frac{2n+5}{3n-1})^{2-\frac{1}{n}}=(\frac{2}{3})^2<1.$$

در نتیجه سری مفروض همگراست.

(ii) داریم

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=\lim_{n\to\infty}(\frac{2^n\sqrt{2\pi n}}{n^n}(\frac{n}{e})^n.e^{\frac{\theta}{12n}})^{\frac{1}{n}}$$
$$=\frac{2}{e}\lim_{n\to\infty}(2\pi n)^{\frac{1}{2n}}.e^{\frac{\theta}{12n^2}}=\frac{2}{e}<1.$$

یعنی ، سری مفروض همگراست.

(iii) داریم $a_n=\frac{1}{2^n}(1+\frac{1}{n})^{n^2}$ و $\sqrt[n]{a_n}=\frac{1}{2}(1+\frac{1}{n})^n$. بنابراین

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n=\frac{1}{2}e>1.$$

لذا سری مفروض واگراست.

۸ . ۶ سری‌های توانی

فرض کنیم x متغیری مستقل بوده، و فرض کنیم $\{a_n\}$ دنباله‌ای از اعداد حقیقی باشد. در این صورت سری نامتناهی

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=a_0+a_1x+a_2x^2+\dots+a_nx^n+\dots\qquad(1)$$

یک **سری توانی** (در x) نامیده شده، و اعداد a_0، a_1، a_2، ....، a_n، ... را **ضرایب سری** یا **ضرایب جملات** آن می‌نامند. در اینجا حد پائین جمع‌بندی بجای 1 ، عدد 0 است، زیرا به صورت قراردادی یک سری توانی با «**صفرمین جمله**» شروع می‌شود. توجه کنید که جملات یک سری توانی $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ ، بجای اعداد که در قسمت قبل بررسی شدند، توابعی از x هستند (سری‌های قسمت قبل را **سری‌های عددی** می نامیم تا بین آنها و سری‌هائی که جملاتشان توابع هستند تمایز قائل شویم) .

اگر $a_N \neq 0$ و برای هر $n > N$ داشته باشیم $a_n = 0$ آنگاه سری توانی (1) به

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_N x^N \left(a_N \neq 0\right)$$

تقلیل می‌یابد که یک چند جمله‌ای از درجهٔ N است. لذا، بابیانی غیر دقیق، سری‌های توانی چند جمله‌ای‌هائی با تعداد نامتناهی جمله هستند. اگر $x = 0$ ، طرف راست (1) به جملهٔ ثابت a_0 تقلیل می‌یابد. برای این که طرف چپ (1) هم برای $x = 0$ به a_0 تقلیل یابد، قرار بر این می‌گذاریم که $0^0 = 1$ ، لذا $a_0 x^0 = a_0 1$ حتی اگر $x = 0$.

اگر c ثابت دلخواهی باشد، می‌توانیم حالت کلیتر سری توانی

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-c)^n = a_0 + a_1(x-c) + a_2(x-c)^2 + \ldots + a_n(x-c)^n + \ldots, \qquad (1')$$

را مورد بررسی قرار دهیم که در آن بجای x از توان‌های $x - c$ استفاده شده است. طبیعتاً ، $(1')$ به (1) تقلیل می‌یابد هرگاه $c = 0$. در حقیقت نیازی به مطالعهٔ جداگانهٔ سری‌هائی به شکل $(1')$ نیست، زیرا هر مطلبی را که در مورد سری‌های $(1')$ بخواهیم، می‌توانیم با تجزیه و تحلیل سری‌های (1) با همان ضرایب فرابگیریم و سپس متغیر را به $x - c$ تبدیل کنیم.

فرض کنیم x مقدار ثابت r را اختیار کند، که در آن r عدد حقیقی دلخواهی است. در این صورت سری توانی $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$، که جملات آن توابع هستند، به سری $\sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n$ تبدیل می شود، که جملات آن اعداد هستند، و سری عددی $\sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n$ را می‌توان با روش‌هائی که قبلاً دیده‌ایم مورد ارزیابی قرار دارد. هر سری توانی $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ (به طور بدیهی) برای $x = 0$ همگراست، زیرا سری به جملهٔ ثابت a_0 تقلیل می‌یابد. سری ممکن است تنها به ازای $x = 0$ همگرا بوده ،یا ممکن است به ازای هر مقدار x همگرا باشد اما در حالت کلی یک سری توانی به ازای بعضی مقادیر مخالف صفر x همگرا و برای دیگر مقادیر واگراست.

مثال ۲۵: (i) فرض کنیم $a_n = n!$ که در آن $0! = 1$. در این صورت سری توانی $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ تنها برای $x = 0$ همگراست.

این مطلب از ملاک خارج قسمت نتیجه می‌شود، زیرا

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}x^{n+1}}{a_n x_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)!\,x^{n+1}}{n!\,x^n}\right| = \lim_{n\to\infty}(n+1)|\,x| = \infty,$$

مگر این که $x=0$.

(ii) اگر $a_n=\frac{1}{n^n}$ ، سری توانی $\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n$ به ازای هر x همگرای مطلق است. این مطلب از ملاک ریشه نتیجه می‌شود، زیرا به ازای هر مقدار x،

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|\,a_n x^n\,|} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{|\,x\,|^n}{n^n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{|\,x\,|}{n} = 0.$$

(iii)یکی از ساده‌ترین سری‌های توانی سری هندسی

$$\sum_{n=0}^{\infty}x^n = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n + \ldots,$$

است، و همان طور که از قضیهٔ ۲ می‌دانیم، به ازای هر x دربازهٔ باز $(-1,1)$ همگرا و برای دیگر مقادیر x واگراست.

بررسی ما از همگرائی سری‌های توانی بر پایهٔ نتیجه کلیدی زیر استوار است.

قضیهٔ ۱۳ (خاصیت اساسی همگرائی سری‌های توانی):

اگر سری توانی $\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n$ برای $x=r$ ، که درآن $r\neq 0$، همگرا باشدآنگاه سری به ازای هر x که در شرط $|\,x\,|<|\,r\,|$ صدق می کند، همگرای مطلق است. اگر سری برای $x=s$ واگرا باشد،آنگاه برای هر x که در شرط $|\,x|>|\,s|$ صدق می‌کند نیز واگرا است.

اثبات. اگر سری $\sum_{n=0}^{\infty}a_n r^n$ همگرا باشد، آنگاه دنبالهٔ $\{a_n r^n\}$ ، بنابر قضیهٔ 1، همگرا به 0 است. به ویژه، به سادگی ساده می‌شود که $\{a_n r^n\}$ کراندارست، یعنی، عدد ثابتی مانند $C>0$ وجود دارد به طوری که به ازای هر n، $\left|a_n r^n\right|\le C$. اما در این صورت

$$\left|a_n x^n\right| = \left|a_n r^n\right|\left|\frac{x}{r}\right|^n \le C\left|\frac{x}{r}\right|^n,$$

بنابراین سری $\sum_{n=0}^{\infty}\left|a_n x^n\right|$ مغلوب سری هندسی

$$\sum_{n=0}^{\infty}C\left|\frac{x}{r}\right|^n = C\left(1+\left|\frac{x}{r}\right|+\left|\frac{x}{r}\right|^2+\ldots\right)$$

است.

اگر $\left|\frac{x}{r}\right|<1$ ، یا معادل با آن $|x|<|r|$ ، این سری هندسی همگراست، وبنابراین $\sum_{n=0}^{\infty}\left|a_n x^n\right|$

نیز با استفاده از ملاک مقایسه، همگراست . به عبارت دیگر ، سری $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ برای هر x که در شرط $|x|<|r|$ صدق می‌کند همگرای مطلق است. برای اثبات قسمت دوم ، ملاحظه می‌کنیم که سری $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ وقتی برای $x=s$ واگراست دیگر نمی‌تواند در نقطه‌ای مانند x با شرط $|x|>|s|$، همگرا باشد. زیرا، بنابر قسمت اول اثبات، $\sum_{n=0}^{\infty} a_n s^n$ نیزبایستی همگرا باشد، که متناقض با فرض است و بدین ترتیب اثبات تمام است.

فرض کنیم I مجموعه نقاطی باشد که برای آن‌ها سری توانی $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ همگرا است. دراین صورت، همانطور که از نماد حدس زده می‌شود، I همواره یک بازه است که **بازه همگرائی**(احتمالاً تمام خط حقیقی $(-\infty,\infty)$ یا بازه مخفف $I=[0,0]$ فقط شامل نقطه 0) نامیده می‌شود.

قضیهٔ ۱۴(بازهٔ همگرائی یک سری توانی): فرض کنیم I مجموعه تمام نقاطی مانند x باشد که برای آنها سری توانی $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ همگراست. در این صورت I یک بازه است که 0 نقطهٔ میانی آن است.

اثبات . نقطهٔ 0 همواره متعلق به I است، چون هر سری توانی برای $x=0$ همگراست. اگر $x=0$ تنها نقطه در I باشد، آنگاه I به بازهٔ $[0,0]$ تقلیل می‌یابد. در غیر این صورت I شامل لااقل دو نقطهٔ متمایز υ, u است. فرض کنیم r هر نقطه‌ای بین υ, u باشد. در این صورت $|r|<|u|$ یا $|r|<|\upsilon|$ ، زیرا r بایستی از یکی از نقاط υ, u یا هر دوی آنها به مبداء نزدیکتر باشد. لذا، بنابر قضیهٔ ۱۳، سری $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ برای $x=r$ همگرا (همگرای مطلق) است. یعنی، r نیز به I تعلق دارد. بنابر این هر وقت مجموعه I شامل دو نقطهٔ متمایز υ, u باشد، همچنین شامل هر نقطه r بین υ, u خواهد بود.لذا I یک بازه است. به علاوه،اگر r یک نقطهٔ درونی I باشد، آنگاه $-r$ نیز متعلق به I است. در حقیقت، در اینحالت همواره می‌توانیم نقاط υ, u را در I چنان پیدا کنیم که r بین υ, u قرار داشته باشد. اما در این صورت، بنابر استدلال گفته شده، $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n r^n|$ همگراست، و بنابراین سری $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n (-r)^n|$ نیز همگراست . به عبارت دیگر $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ برای $x=-r$ همگرای مطلق است،یعنی $-r$ به I تعلق دارد. نتیجه می‌گیریم که 0 نقطهٔ میانی I است.

به صورت خلاصه، نتیجهٔ آنی از قضیه ۱۴ بدین شکل است که هر سری توانی $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ دقیقاً به یکی از سه طریق زیر رفتار می‌نماید:

(i) سری تنها برای $x=0$ همگراست، مانند (i) از مثال ۲۵ ، و در این صورت بازهٔ همگرایی I به بازهٔ $[0,0]$ ، که فقط شامل نقطهٔ 0 است، تقلیل می‌یابد.

(ii) سری همگرا(همگرای مطلق) برای هر x است، مانند (ii) از مثال ۲۵، در این صورت I تمام خط حقیقی $(-\infty,\infty)$ است.

(iii) سری برای بعضی مقادیر غیر صفر x همگرا و برای دیگر مقادیر واگراست. در این صورت I بازه‌ای متناهی به شکل $(-R,R)$ ، $[-R,R]$، $[-R,R)$ یا $(-R,R]$ ، با شرط $R>0$ ، است بسته به این که چگونه سری در نقاط $x=-R, x=R$ رفتار کند، که این مطلب بایستی به صورت جداگانه مورد بررسی قرار گیرد. در اینجا توجه به این مطلب مهم است که اثبات قضیهٔ ۱۴ هیچ نتیجه‌گیری را در مورد این که نقاط انتهائی I به خود I تعلق دارند بدست نمی‌دهد،و در حقیقت بازهٔ همگرائی I ممکن است شامل یکی یا هیچکدام از نقاط انتهائی خود نباشد، همچنانکه در مثال‌های آتیه نشان داده شده است. به عبارت دیگر، سری ممکن است برای $x=R$ یا $x=-R$ همگرا باشد یا نباشد.

عدد R در حالت (iii) **شعاع همگرائی** سری توانی $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ نامیده می‌شود. حالت (i) را می‌توان به عنوان حالت خاصی از (iii) در نظر گرفت که متناظر به $R=0$ است و حالت (ii) را به عنوان حالت خاصی از (iii) که متناظر به $R=\infty$ است.

در زیر روشی را برای یافتن شعاع همگرائی یک سری توانی ارائه می‌دهیم:

فرض کنیم سری توانی

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots \qquad (2)$$

داده شده باشد. سری با قدر مطلق جملات سری فوق را در نظر می‌گیریم

$$|a_0| + |a_1||x| + |a_2||x|^2 + \ldots + |a_n||x|^n + \ldots . \qquad (3)$$

برای تعیین همگرائی این سری (با جملات مثبت) ملاک دالامبر (خارج قسمت) را بکار می‌بریم. فرض کنیم حدی وجود داشته باشد:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1} x^{n+1}}{a_n x^n} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| |x| = L|x| .$$

در این صورت، بنابر ملاک دالامبر، سری (3) همگراست هرگاه $L|x|<1$ ، یعنی، هرگاه $|x|<\frac{1}{L}$ ، و واگراست هرگاه $L|x|>1$، یعنی، هرگاه $|x|>\frac{1}{L}$. در نتیجه سری (2) همگرای مطلق است

وقتی که $|x|<\frac{1}{L}$. اما اگر $|x|>\frac{1}{L}$، آنگاه $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=|x|L>1$ و سری (3) واگراست، و جملهٔ عمومی آن به صفر میل نمی‌کند. پس در این صورت جملهٔ عمومی سری (2) هم به صفر میل نمی‌کند، ومعنی آن این است که (با توجه به شرط لازم برای همگرائی) این سری توانی واگراست (هرگاه $|x|>\frac{1}{L}$).

از بحث بالا نتیجه می‌گیریم که بازهٔ $(-\frac{1}{L},\frac{1}{L})$ بازهٔ همگرائی سری توانی (2) است،یعنی:

$$R=\frac{1}{L}=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|.$$

به طریق مشابه ، برای تعیین بازهٔ همگرائی می‌توانیم از ملاک کوشی (ریشه) استفاده کنیم، و در این صورت

$$R=\frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}}.$$

تبصره: می‌توانیم ثابت کنیم که اگر $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=0$، آنگاه سری $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ بر سر تاسر اعداد حقیقی همگراست، یعنی، $R=\infty$، و اگر $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\infty$ ، آنگاه سری تنها به ازای $x=0$ همگراست، یعنی، $R=0$.

مثال ۲۶: (i) سری $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{|x^n|}{n}$ را در نظر می‌گیریم. در اینجا $a_n=\frac{1}{n}$ و $a_{n+1}=\frac{1}{n+1}$. بنابراین

$$R=\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)=1.$$

در نتیجه، بنابر توضیحات بالا، این سری دربازهٔ (۱ و ۱-) همگراست. رفتار سری را در نقاط انتهائی بازهٔ همگرائی، یعنی، در نقاط $x=\pm1$ بررسی می‌کنیم. برای $x=1$ سری همساز $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ و برای $x=-1$ سری $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n}$ را، که بنابر ملاک لایبنیتز همگراست،بدست می‌آوریم. لذا این سری در $[-1,1)$ همگرا ودر خارج آن واگراست.

(ii) سری $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n!\,x^n$ بر سر تاسر خط حقیقی واگراست، بجز در نقطهٔ $x=0$ ، زیرا شعاع همگرائی عبارت است از

$$R=\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{(n+1)\ !}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+n}=0.$$

(iii) سری $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$ بر سرتاسر اعداد حقیقی همگراست زیرا شعاع همگرایی آن

$$R=\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!}{n!}=\lim_{n\to\infty}(n+1)=\infty.$$

مثال ۲۷: (i) برای سری هندسی $\sum_{n=0}^{\infty}x^n$ که در مثال ۲۵ بررسی شد، شعاع همگرایی 1 است. بازهٔ همگرایی بازهٔ باز $(-1,1)$ می‌باشد، زیرا $\sum_{n=0}^{\infty}x^n$ برای $|x|\ge 1$ واگراست، به ویژه برای $x=\pm 1$. در حالت کلی، سری هندسی

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x}{R}\right)^n=1+\frac{x}{R}+\left(\frac{x}{R}\right)^2+\ldots+\left(\frac{x}{R}\right)^n+\ldots$$

دارای شعاع همگرایی R و بازهٔ همگرایی $(-R,R)$ است.

(ii) با اجرای ملاک خارج قسمت برای سری توانی

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n+1}=1+\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}+\frac{x^3}{4}+\ldots \qquad (4)$$

بدست می‌آوریم

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^{n+1}}{n+2}\frac{n+1}{x^n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n+2}|x|=|x|.$$

بنابراین سری برای $|x|<1$ همگرای مطلق و برای $|x|>1$ واگراست. لذا شعاع همگرایی 1 است. بازه همگرایی بازه نیمه باز $[-1,1)$ است. در حقیقت، برای $x=1$ سری (4) به سری واگرای همساز

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots,$$

تبدیل می‌شود، در حالیکه برای $x=-1$ به سری همگرای مشروط همساز متناوب

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots$$

تبدیل می‌گرد. با تبدیل x به $-x$ در (4)، سری

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^n}{n+1}=1-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}-\frac{x^3}{4}+\ldots,$$

را بدست می‌آوریم که این سری هم دارای شعاع همگرائی 1 است اما اکنون برای $x=1$ همگرای مشروط و برای $x=-1$ واگراست. لذا این بار بازهٔ همگرایی $(-1,1]$ است.

(iii)سری متناوب

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{n+1}=1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{3}-\frac{x^6}{4}+\ldots \qquad (5)$$

یک سری توانی است که فقط شامل توان‌های زوج x است. کاربرد ملاک خارج قسمت اکنون نتیجه می‌دهد

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^{2n+2}}{n+2}.\frac{n+1}{x^{2n}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n+2}|x|^2=x^2 .$$

بنابراین سری همگرای مطلق است هرگاه $x^2<1$ یا معادل با آن $|x|<1$، و واگراست هرگاه $x^2>1$ یا معادل با آن $|x|>1$، بنابراین شعاع همگرائی سری مساوی 1 است. فاصله همگرایی بازهٔ بسته $[-1,1]$ است. در حقیقت با قراردادن $x=-1, x=1$ در سری (5)، یک سری همگرای مشروط، یعنی سری همساز متناوب را بدست می‌آوریم.

(iv)با اجرای ملاک خارج قسمت برای سری توانی

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{5^n(n+1)^2}=1+\frac{x}{5.2^2}+\frac{x^2}{5^2.3^2}+\frac{x^3}{5^3.4^2}+\dots \qquad (6)$$

بدست می‌آوریم

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^{n+1}}{5^{n+1}(n+2)^2}\frac{5^n(n+1)^2}{x^n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2}{(n+2)^2}\frac{|x|}{5}=\frac{|x|}{5}.$$

بنابراین سری برای $|x|<5$ همگرای مطلق و برای $|x|>5$ واگراست، لذا شعاع همگرایی آن 5 است. بازهٔ همگرایی بازهٔ بسته $[-5,5]$ است. در حقیقت، برای $x=5$ سری (6)سری همگرای

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\dots$$

(سری $-p$ با $P=2$) است، در حالیکه برای $x=-5$ سری به صورت

$$1-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}-\frac{1}{4^2}+\dots$$

در می‌آید که همگرای مطلق است.

(v) با اجرای ملاک ریشه (کوشی) برای سری توانی

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n^2\,x^{2n}}{(\ln n)^n}=\frac{2^2\,x^4}{(\ln 2)^2}+\frac{3^2\,x^6}{(\ln 3)^3}+\frac{4^2\,x^8}{(\ln 4)^4}+\dots$$

که شامل فقط توان‌های زوج x با شروع از x^4 است بدست می‌آوریم که به ازای هر مقدار x

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|\frac{n^2\,x^{2n}}{(\ln n)^n}\right|}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\sqrt[n]{n}\right)^2}{\ln n}|x|^2=0$$

(یاد آوری می‌کنیم که $\sqrt[n]{n}\to 1$ وقتی $n\to\infty$). بنابراین سری مورد نظر به ازای هر x همگرای مطلق است، یعنی،دارای شعاع همگرایی بینهایت و بازهٔ همگرایی $(-\infty,\infty)$ می‌باشد.

برای یک سری توانی به شکل کلی

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-c)^n=a_0+a_1(x-c)+\dots+a_n(x-c)^n+\dots$$

که در آن c ثابت دلخواهی است، مجموعه نقاطی که برای آن‌ها سری همگراست مجدداً یک بازهٔ I است که **بازهٔ همگرایی** نامیده می‌شود، و در حقیقت، سه طریقی را که بعد از قضیه ۱۴ از آن صحبت نمودیم در اینجا به صورت زیر در می‌آید:

(i')سری فقط در $x=c$ همگراست، در این صورت بازهٔ همگرایی I به بازه $[c,c]$ تقلیل می‌یابد، که فقط شامل نقطه c است.

(ii') سری برای هر x (به طور مطلق) همگراست، و در این صورت I تمام خط حقیقی $(-\infty,\infty)$ است.

(iii') سری برای بعضی مقادیر x غیر از c همگرا و برای دیگر مقادیر واگراست. در این صورت I بازه‌ای متناهی به شکل $(c-R\,,c+R)$, $[c-R\,,c+R]$، $[c-R,c+R)$ یا $(c-R\,,c+R]$ است، بسته به این که چگونه سری در نقاط $x=c+R$ و $x=c-R$ رفتار می‌نماید. البته می‌دانیم که بررسی وضعیت سری در این نقاط بایستی به صورت جداگانه انجام شود.

برای بدست آوردن این حالت‌ها از روی حالت‌های قبلی $(i),(ii)$ و (iii) در مورد یک سری توانی به شکل $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$، فقط کافی است به این نکته توجه کنیم که اگر متغیر یک سری توانی از x به $x-c$ تغییر نماید، در این صورت بازه همگرایی آن c واحد در طول محور حقیقی به سمت راست انتقال می‌یابد هرگاه $c>0$، و $|c|$ واحد به طرف چپ انتقال می‌یابد هرگاه $c<0$، مانند قبل، عدد R در حالت (iii') **شعاع همگرایی** سری توانی $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-c)^n$ نامیده شده، و حالت‌های $(i'),(ii')$ متناظر به $R=0\,, R=\infty$ است. دقت کنید که همواره R نصف طول بازه همگرایی است، با توجه به اینکه طول بازه‌های $[c,c]$ و $(-\infty,\infty)$ به ترتیب 0 و ∞ در نظر گرفته می‌شود.

مانند حالت سری توانی $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$، برای یافتن شعاع همگرایی R از سری توانی

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-c)^n = a_0 + a_1(x-c) + \ldots + a_n (x-c)^n + \ldots$$

می توان از فرمول‌های زیر استفاده نمود:

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| \qquad , R = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}} \ .$$

مثال ۲۸: (i) سری

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-6)^n}{n+1} = 1 + \frac{x-6}{2} + \frac{(x-6)^2}{3} + \frac{(x-6)^3}{4} + \ldots \quad (6)$$

یک سری توانی در $x-6$ است که از روی سری (4) در مثال ۲۷ بدست می‌آید هرگاه بجای x مقدار $x-6$ قرار داده شود. سری (4) دارای شعاع همگرایی 1 و بازهٔ همگرایی $[-1,1)$ بود. سری (6) دارای همان شعاع همگرایی 1 اما بازهٔ متفاوت همگرایی، یعنی $[6-1,6+1)=[5,7)$ است که 6 واحد به سمت راست انتقال یافته است. متناوباً، با کاربرد مستقیم ملاک خارج قسمت برای سری (6) بدست می‌آوریم

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(x-6)^{n+1}}{n+2}\ \frac{n+1}{(x-6)^n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n+2}|x-6|=|x-6|.$$

نتیجه می‌گیریم که سری (6) همگرای مطلق است هرگاه $|x-6|<1$، یعنی، هرگاه $-1<x-6<1$ یا معادل با آن $5<x<7$، و واگراست هرگاه $|x-6|>1$، یعنی هرگاه $x-6>1$ یا $x-6<-1$، که معادل است با $x>7$ یا $x<5$. به علاوه ، برای $x=7$ سری تبدیل به سری همساز می شود که واگراست، در حالیکه برای $x=5$ تبدیل به سری همساز متناوب می‌شود که همگرای مشروط است.
لذا، همانطور که قبلاً دیدیم، سری دارای شعاع همگرایی 1 و بازۀ همگرایی $[5,7)$ است.
(ii)سری

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-2)^n}{n^2}=(x-2)+\frac{1}{2^2}(x-2)^2+\frac{1}{3^2}(x-2)^3+\ldots$$

را در نظر می‌گیریم. در اینجا $a=\frac{1}{n^2}$, $a_{n+1}=\frac{1}{(n+1)^2}$ و

$$R=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^2=1.$$

در نتیجه، سری همگراست هرگاه $-1<x-2<1$، یعنی، $1<x<3$.
اکنون به بررسی همگرایی سری در نقاط انتهایی بازه می‌پردازیم. اگر $x=3$، سری $1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\ldots$ را بدست می‌آوریم که همگراست زیرا سری $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ برای $p>1$ همگراست. اگر $x=1$، سری $-1+\frac{1}{2^2}-\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}$ را بدست می‌آوریم و می‌دانیم که این سری همگرای مطلق است. بنابراین سری توانی برای مقادیری از x که در $1\le x\le 3$ صدق می‌کنند همگراست.
سری (iii)

$$\sum_{n=1}^{\infty}n!(x-5)^n=1!(x-5)+2!(x-5)^2+3!(x-5)^3+\ldots$$

را در نظر می‌گیریم. در اینجا $a_n=n!$, $a_{n+1}=(n+1)!$ و

$$R=\lim_{n\leftarrow\infty}\frac{n!}{(n+1)!}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}=0.$$

سری تنها برای $x-5=0$، یعنی در نقطه $x=5$ همگراست.
(iv) سری توانی $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-1)^{n(n+1)}}{n^n}$ را در نظر می‌گیریم. با استفاده از ملاک کوشی، قرار می‌دهیم $u_n=\frac{(x-1)^{n(n+1)}}{n^n}$. در این صورت داریم $\sqrt[n]{|u_n|}=\frac{|x-1|^{n+1}}{n}$ و

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|u_n|}=\begin{cases}0 & ,|x-1|\le 1\\ \infty & ,|x-1|>1.\end{cases}$$

(به سادگی می‌توان نشان داد که برای $a>1$ داریم $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a^n}{n}=\infty$) بنابراین مشاهده می‌کنیم که سری همگراست هرگاه $|x-1|\le 1$، یعنی $[0,2]$ بازهٔ همگرایی است.

قضیه زیر، که آن را بدون اثبات می‌پذیریم، راه روشنی برای ساختن دسته‌ای از تمامی سری‌های توانی با شعاع یکسان بدست می‌دهد. از این قضیه در بخش بعدی استفاده خواهیم کرد.

قضیه ۱۵: فرض کنیم $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ یک سری توانی بوده، و فرض کنیم $\{c_n\}$ دنباله دلخواهی از اعداد مثبت باشد به طوری که

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{c_n}=1\,. \qquad (7)$$

در این صورت سری توانی $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n a_n x^n$ دارای همان شعاع همگرایی سری $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ است.

به عنوان کاربردی از قضیه بالا ملاحظه می‌کنیم که سری $\sum\limits_{n=0}^{\infty} n^p a_n x^n$، به ازای هر عدد حقیقی p، دارای همان شعاع همگرایی سری $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ است، زیرا

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n^p}=\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt[n]{n}\right)^p=1\,.$$

۸ . ۷ مشتق و انتگرال سری‌های توانی

فرض کنیم $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ یک سری توانی با بازه همگرایی I باشد، و فرض کنیم f تابعی باشد که بر I تعریف شده و مقدارش در هر نقطه r متعلق به I همان حاصلجمع سری $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n r^n$ باشد. در این صورت f **حاصلجمع** سری توانی $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ نامیده شده، و می‌نویسیم

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\,. \qquad (1)$$

همواره توجه داشته باشید که حاصلجمع یک سری توانی **تابعی** از متغیر x است، بر خلاف حاصلجمع سری $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_r r^n$ که یک **عدد** است. فرمول (1) را **بسط** f **به سری توانی**(در $x=0$) می‌نامند.

مثال ۲۹: سری توانی $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n$ یک سری هندسی با بازهٔ همگرایی $I=(-1,1)$ است.

به علاوه همانطور که در قضیه ۲ دیدیم،

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n + \ldots = \frac{1}{1-x},$$

بنابراین تابع

$$f(x) = \frac{1}{1-x}$$

حاصلجمع سری $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ است، اما فقط روی بازهٔ I، زیرا سری در خارج I واگراست. به صورت متناظر

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n + \ldots \qquad (2)$$

بسط این تابع به سری توانی می‌باشد.

به طوری کلی، فرض کنیم $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-c)^n$ یک سری توانی در $x-c$ با بازهٔ همگرایی I بوده، و فرض کنیم f تابعی باشد که بر I تعریف شده و مقدارش در هر نقطه r متعلق به I همان حاصلجمع سری عددی $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (r-c)^n$ باشد. در این صورت f **حاصلجمع** سری توانی $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-c)^n$ نامیده شده و می‌نویسیم

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-c)^n . \qquad (1')$$

فرمول $(1')$ **بسط تابع** f به **سری توانی در** $x = c$ نامیده شده و به فرمول (1) تقلیل می‌یابد هر گاه $c = 0$. در مثال‌های بعدی نشان داده خواهد شد که ضرایب $(n = 0,1,\ldots)$ a_n در بسط $(1')$ به طور منحصر به فرد توسط تابع f و ثابت c تعیین می‌گردند.

مثال ۳۰: سری هندسی

$$\sum_{n=0}^{\infty} (x-1)^n = 1 + (x-1) + (x-1)^2 + \ldots \qquad (3)$$

همگراست اگر و فقط اگر $|x-1| < 1$، در حالیکه سری

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{2^{n+1}} = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x}{2}\right)^n = \frac{1}{2} + \frac{x}{4} + \frac{x^2}{8} + \ldots, \qquad (3')$$

که این هم یک سری هندسی است، همگراست اگر و فقط اگر $\left|\frac{x}{2}\right| < 1$ یا معادل با آن $|x| < 2$. در (2) ابتدا بجای x مقدار $x-1$ و سپس $\frac{x}{2}$ را قرار داده بدست می‌آوریم

$$\frac{1}{1-(x-1)} = \frac{1}{2} \frac{1}{1-\frac{x}{2}} = \frac{1}{2-x}.$$

بنابراین تابع $f(x)=\dfrac{1}{2-x}$ دارای بسط به سری توانی

$$\frac{1}{2-x}=\frac{1}{2}+\frac{x}{4}+\frac{x^2}{8}+\dots \qquad (|x|<2)$$

در $x=0$ و بسط

$$\frac{1}{2-x}=1+(x-1)+(x-1)^2+\dots \qquad (|x-1|<1)$$

در $x=1$ است. توجه کنید که بازه همگرایی سری $(3')$ بازهٔ $(-2,2)$ است در حالیکه بازه همگرایی (3) بازهٔ کوچکتر $(0,2)$ می‌باشد. این مطلب درست است، زیرا بازه همگرایی سری توانی تابع f نمی‌تواند شامل نقطه $x=2$، که در آن f به سمت بینهایت میل می‌کند، باشد.

سری توانی

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n + \dots \quad (4)$$

مفروض است. می‌توانیم به وسیله مشتق‌گیری و انتگرال‌گیری جمله به جمله از (4) دو سری جدید بدست آوریم، یعنی، می‌توانیم سری

$$\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} = a_1 + 2a_2 x + \dots + n a_n x^{n-1} + \dots, \qquad (5)$$

را که جمله عمومی آن مشتق $a_n x^n$ است، و سری

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1} = a_0 x + \frac{a_1}{2} x^2 + \dots + \frac{a_n}{n+1} x^{n+1} + \dots, \quad (6)$$

را که جمله عمومی آن انتگرال $a_n x^n$ (از 0 تا x است)، بدست آوریم. هر سه سری (4)، (5)، (6) دارای شعاع همگرایی یکسان هستند. در حقیقت، ضرب یک سری توانی در x یا تقسیم یک سری توانی که چند جمله ثابت ندارد، بر x هیچ تأثیری بر شعاع همگرایی ندارد (این مطلب به سادگی از روی ملاک خارج قسمت دیده می‌شود)، لذا سری (5) دارای همان شعاع همگرایی سری

$$\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^n, \qquad (5')$$

است و در همان حال (6) دقیقاً دارای شعاع همگرایی سری

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^n, \quad (6')$$

می‌باشد. اما $(5')$ و $(6')$ هر دو به شکل $\sum_{n=0}^{\infty} c_n a_n x^n$ هستند که در آن $\sqrt[n]{c_n} \to 1$ هرگاه $n\to\infty$، زیرا می‌دانیم $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$ و

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{n+1}}=\lim_{n\to\infty} e^{-(\frac{1}{n})\ln(n+1)}=e^0=1 .$$

لذا، بنابر قضیه ۱۵، دارای همان شعاع همگرایی سری اولیه (4) می‌باشند و بنابراین سری‌های

مشتق و انتگرال (5) و (6) نیز در این شرط صدق می‌کنند. تکرار این روش نشان می‌دهد که نتیجه مشتق‌گیری یا انتگرال‌گیری جمله به جمله، از سری توانی $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ به هر تعداد دلخواه سری‌های دیگری بدست می‌دهد که دارای همان شعاع همگرایی می‌باشند.

قضیه زیر رابطه‌ای برقرار می‌کند بین تابعی که حاصلجمع یک سری توانی است و تابعی که حاصلجمع سری توانی مشتق است. علیرغم سادگی صورت قضیه، اثبات آن دارای پیچیدگی‌های خاصی است و لذا حذف می‌گردد. علاقمندان می‌توانند به کتب حساب دیفرانسیل و انتگرال پیشرفته یا آنالیز ریاضی مراجعه نمایند.

قضیه ۱۶ (مشتق‌گیری جمله به جمله از یک سری توانی): فرض کنیم $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ یک سری توانی با شعاع همگرایی R باشد. در این صورت تابع

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

، یعنی، حاصلجمع سری توانی ، بر بازهٔ باز $(-R,R)$ مشتق‌پذیر بوده، و دارای مشتق

$$f'(x)=\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}\,, \qquad (7)$$

است که مساوی حاصلجمع سری بدست آمده بوسیله مشتق‌گیری جمله به جمله از سری مفروض می‌باشد.

با تکرار قضیه ۱۶، ملاحظه می‌کنیم که f دارای مشتقات متوالی تا هر مرتبه دلخواه در بازهٔ $(-R,R)$ می‌باشد. و مطلب را بدین صورت خلاصه می‌کنیم که f بر $(-R,R)$ **بینهایت بار مشتق‌پذیر** است. به علاوه، مشتق‌پذیری f بر $(-R,R)$ پیوستگی آن را بر $(-R,R)$ بدست می‌دهد. بنابراین حاصلجمع هر سری توانی تابعی پیوسته است.

با استفاده از قضیه ۱۶، بسادگی می‌توان رابطه بین f و تابعی را که حاصلجمع سری انتگرال است، برقرار نمود.

قضیه ۱۷(انتگرال‌گیری جمله به جمله از یک سری توانی): فرض کنیم $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ یک سری توانی با شعاع همگرایی R باشد. در این صورت تابع

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

بر هر زیر بازهٔ $[0,x]$ از $(-R,R)$ انتگرال‌پذیر، با انتگرال

$$\int_0^x f(t)\,dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}, \qquad (8)$$

است. این انتگرال مساوی حاصلجمع بدست آمده به وسیله انتگرال‌گیری جمله به جمله از سری مفروض می‌باشد.

اثبات. انتگرال‌پذیری f بر $[0,x]$ نتیجه آنی پیوستگی تابع f بر $(-R,R)$ است. قبلاً نشان داده شده است که سری

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$$

دارای شعاع همگرایی R است، و بدیهی است که $F(0)=0$. مشتق گیری جمله به جمله از این سری بلافاصله سری اولیه $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ را بدست می دهد،و

$$F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$$

(توجه کنید که چگونه این با شرط $F(0)=0$ تشریک مساعی می‌نماید). فرمول خواسته شده (8) اکنون با مساوی قرار دادن دو عبارت بدست آمده برای $F(x)$ حاصل می‌گردد.

به مثال‌های زیر توجه نمائید.

مثال ۳۱: (i) استفاده از ملاک خارج قسمت یا ریشه نشان می‌دهد که سری توانی

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2} \qquad (9)$$

دارای شعاع همگرایی 1 است. بنابر قضیه ۱۶، با دو بار مشتق گیری از آن بدست می‌آوریم

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{n} \quad (9')$$

و

$$f''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n-1}{n} x^{n-2}\,. \quad (9'')$$

هر سه سری (9)، $(9')$و $(9'')$دارای شعاع همگرایی یکسان 1 می‌باشند، اما بسادگی دیده می‌شود که بازهٔ همگرایی (9) بازهٔ **بسته** $[-1,1]$ است، بازهٔ همگرایی $(9')$بازهٔ **نیم- باز** $[-1,1)$ است، و بالاخره بازهٔ همگرایی $(9'')$بازهٔ **باز** $(-1,1)$ می‌باشد. بنابراین، هر چند که مشتق‌گیری از یک سری توانی همگرایی در هر نقطه درونی بازهٔ همگرایی I را حفظ می‌کند، این امکان وجود دارد که همگرایی در نقاط انتهایی I را از بین ببرد.

(ii)اگر دو سر توانی $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ و $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ دارای حاصلجمع یکسان در یک همسایگی از نقطه

$x=0$ باشند، آنگاه دو سری همانند هستند، یعنی، توان‌های همانند x دارای ضرایب یکسان می‌باشند. در حقیقت با قراردادن $x=0$ در اتحاد

$$a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots\equiv b_0+b_1x+b_2x^2+\ldots,\quad(10)$$

فوراً بدست می‌آوریم $a_0=b_0$. به علاوه، بنابر قضیه ۱۶، اتحاد (10) برقرار خواهد بود هرگاه از دو طرف به دفعات یکسان مشتق بگیریم. با n بار مشتق‌گیری متوالی از (10) دیده می‌شود که

$$\begin{aligned}&n!a_n+(n+1)!a_{n+1}x+\frac{(n+2)!}{2!}a_{n+2}x^2+\ldots\\&\quad=n!b_n+(n+1)!b_{n+1}x+\frac{(n+2)!}{2!}b_{n+2}x^2+\ldots,\end{aligned}$$

که، بعد از جایگذاری $x=0$، بدست می‌آوریم $a_n=b_n$. لذا برای $n=0,1,2,\ldots$ داریم $a_n=b_n$. در حالت کلی، اگر $\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-c)^n$ و $\sum_{n=0}^{\infty}b_n(x-c)^n$ دو سری توانی در $x-c$ بوده و دارای حاصلجمع یکسان در یک همسایگی نقطه $x=c$ باشند، آنگاه دو سری همانند هستند (در همانی $\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-c)^n\equiv\sum_{n=0}^{\infty}b_n(x-c)^n$ و آن‌هایی که از مشتق‌گیری متوالی بدست می‌آیند، $x=c$ قرار دهید). بنابراین ضرایب بسط به سری توانی $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-c)^n$ **به صورت منحصر به فرد،** با تابع f ، و نیز البته با انتخاب ثابت c معین می‌گردد.

(iii) از روی ملاک مقایسه فوراً نتیجه می‌شود که سری توانی

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\ldots$$

به ازای هر x همگراست. بنابر قضیه ۱۶،

$$f'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{nx^{n-1}}{n!}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!},$$

لذا سری مشتق دقیقاً همان سری اولیه است. بنابراین حاصلجمع تابع $y=f(x)$ در معادله دیفرانسیل

$$y'=y$$

صدق می‌کند، در صورتی که شرط اولیه $y|_{x=0}=1$، که با قراردادن $x=0$ در سری بسط $f(x)$ بدست می‌آید، بر قرار باشد. داریم

$$\begin{aligned}&\frac{dy}{dx}=y\Leftrightarrow\frac{dy}{y}=dx\Leftrightarrow\int\frac{dy}{y}=\int dx\Rightarrow\\&\quad\ln|y|=x+c_1\Rightarrow y=e^{x+c_1}=ce^x\left(c=e^{C_1}\right)\end{aligned}$$

با استفاده از شرط اولیه، $c=1$ و بنابراین $y=e^x$ جواب مورد نظر است. در نتیجه

$$e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}=1+x+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\ldots,\quad(11)$$

و بسط تابع $f(x)=e^x$ به سری توانی در $x=0$ را پیدا کرده‌ایم.

(iv)از مثال ۲۹ (i) می‌دانیم که

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+\dots+x^n+\dots \qquad (|x|<1) \qquad (13).$$

با استفاده از قضیه ۱۶ برای مشتق‌گیری جمله به جمله از این سری بدست می‌آوریم

$$\frac{1}{(1-x)^2}=1+2x+3x^2+\dots+nx^{n-1}+\dots \quad (|x|<1) \qquad (13')$$

که بسط تابع $\frac{1}{(1-x)^2}$ به سری توانی در $x=0$ می‌باشد.

مثال ۳۲: (i) با انتگرال‌گیری جمله به جمله از سری هندسی همگرای

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-x)^n=1-x+x^2-x^3+\dots=\frac{1}{1-(-x)}=\frac{1}{1+x} \qquad (|x|<1) \qquad (14)$$

بدست می‌آوریم

$$x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\dots=\int_0^x\frac{dt}{1+t}.$$

اما به دلیل آنکه $|x|<1$

$$\int_0^x\frac{dt}{1+t}=\ln(1+x),$$

و بنابراین

$$\ln(1+x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\dots \qquad (|x|<1) \qquad (15)$$

که بسط تابع $\ln(1+x)$ به سری توانی در $x=0$ است.

(ii)با تغییر x به x^2 در بسط (14) بدست می‌آوریم که

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(-x^2\right)^n=1-x^2+x^4-x^6+\dots=\frac{1}{1+x^2} \qquad (|x|<1).$$

انتگرال‌گیری جمله به جمله از این سری توانی نتیجه می‌دهد که

$$x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\dots=\int_0^x\frac{dt}{1+t^2}.$$

اما

$$\int_0^x\frac{dt}{1+t^2}=arc\,tgx,$$

لذا بسط تابع $arc\,tgx$ به سری توانی در $x=0$ عبارت است از

$$arc\,tgx=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\dots \qquad (|x|<1). \qquad (16)$$

قضیه ۱۸ (سری دو جمله‌ای): اگر m عددی حقیقی دلخواهی باشد، آنگاه

$$(1+x)^m = 1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1)}{n!}x^n, \qquad (17)$$

به ازای تمام مقادیر x که در شرط $|x|<1$ صدق می‌کنند.

اثبات. در جبر مقدماتی آموخته‌ایم که قضیه دو جمله‌ای عبارت $(a+b)^m$ را به صورت حاصلجمعی از توان‌های b,a بیان می‌کند، که در آن m عدد صحیح و مثبتی است:

$$(a+b)^m = a^m + ma^{m-1}b + \frac{m(m-1)}{2!}a^{m-2}b^2 + \ldots + \frac{m(m-1)\ldots(m-k+1)}{k!}a^{m-k}b^k + \ldots + b^m.$$

اکنون $a=1$ و $b=x$ گرفته و قضیه دو جمله‌ای را برای عبارت $(1+x)^m$ بکار می‌بریم که در آن m عددی صحیح و مثبت نمی‌باشد. سری توانی زیر را بدست می‌آوریم:

$$1+mx+\frac{m(m-1)}{2!}x^2+\frac{m(m-1)(m-2)}{3!}x^3+\ldots+\frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1)}{n!}x^n+\ldots. \qquad (18)$$

این عبارت **سری دو جمله‌ای** نامیده می‌شود. برای یافتن شعاع همگرایی سری (18) ملاک خارج قسمت را بکار برده و بدست می‌آوریم

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\dfrac{m(m-1)\ldots(m-n+1)(m-n)}{(n+1)!}x^{n+1}}{\dfrac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{n!}x^n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{m-n}{n+1}\right||x| = |x|.$$

لذا سری همگراست هرگاه $|x|<1$. اکنون ثابت می‌کنیم که سری (18) به ازای هر عدد حقیقی m حاصلجمع تابع $(1+x)^m$ است هرگاه x در بازه باز $(-1,1)$ باشد. فرض کنیم

$$f(x)=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{n!}x^n \quad (|x|<1). \qquad (19)$$

می‌خواهیم نشان دهیم $f(x)=(1+x)^m$ که در آن $|x|<1$. بنابر قضیه ۱۶، داریم

$$f'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{(n-1)!}x^{n-1} \quad (|x|<1). \qquad (20)$$

با ضرب طرفین معادله (20) در x بدست می‌آوریم

$$x\,f'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{(n-1)!}x^n. \qquad (21)$$

با بازنویسی طرف راست (20) داریم

$$f'(x)=m+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{(n-1)!}x^{n-1} \qquad (22)$$

در (22) اگر از حد پایین یک واحد کم کرده و بجای n مقدار $n+1$ را قرار می‌دهیم، بدست می‌آوریم

$$f'(x)=m+\sum_{n=1}^{\infty}(m-n)\frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{(n-1)!}x^{n-1}\ . \qquad (23)$$

اگر در (21) صورت و مخرج را در n ضرب کنیم، بدست می‌آوریم

$$x\,f'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}n\frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{n!}x^{n}. \qquad (24)$$

چون سری‌های (23) و (24) برای $|x|<1$ همگرای مطلق هستند می‌توانیم آن‌ها را جمله به جمله با هم جمع کنیم و سری بدست آمده برای $|x|<1$ همگرای مطلق خواهد بود. پس از جمع نمودن بدست می‌آوریم

$$(1+x)f'(x)=m\left[1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{n!}x^{n}\right].$$

چون بنابر (19) عبارت داخل کروشه همان $f(x)$ است، داریم

$$(1+x)\,f'(x)=mf(x)$$

یا معادل با آن

$$\frac{f'(x)}{f(x)}=\frac{m}{1+x}.$$

طرف چپ معادله بالا $\frac{d}{dx}(\ln\ f(x))$ است، لذا می‌توانیم بنویسیم

$$\frac{d}{dx}(\ln\ f(x))=\frac{m}{1+x}.$$

با وجود این، می‌دانیم که

$$\frac{d}{dx}\left(\ln(1+x)^{m}\right)=\frac{m}{1+x}.$$

به دلیل آنکه $\ln\ f(x)$ و $\ln(1+x)^{m}$ دارای مشتق یکسان هستند، اختلاف آن‌ها در یک عدد ثابت است. بنابراین،

$$\ln\ f(x)=\ln(1+x)^{m}+C.$$

از روی (19) می‌بینیم که $f(0)=1$ ، بنابراین $C=0$ و بدست می‌آوریم

$$f(x)=(1+x)^{m}.$$

بدین ترتیب قضیه ثابت شده است.

مثال ۳۳: (i) تابع $f(x)=\frac{1}{\sqrt{1+x}}$ را به صورت سری توانی در x بیان نمائید.

(ii) از نتیجه (i) سری دو جمله‌ای برای $\left(1-x^2\right)^{-\frac{1}{2}}$ را بدست آورده و با استفاده از آن بسط تابع $arc\sin x$ به سری توانی را پیدا کنید.

حل. (i) از روی قضیه ۱۸، وقتی $|x|<1$، داریم

$$\begin{aligned}(1+x)^{-\frac{1}{2}} &= 1-\frac{1}{2}x+\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}-1\right)}{2!}x^2+\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}-1\right)\left(-\frac{1}{2}-2\right)}{3!}x^3\\ &+\ldots+\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{5}{2}\right)\ldots\left(-\frac{1}{2}-n+1\right)}{n!}x^n+\ldots\\ &=1-\frac{1}{2}x+\frac{1.3}{2^2.2!}x^2-\frac{1.3.5}{2^3.3!}x^3+\ldots\\ &+(-1)^n\frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2^n\, n!}x^n+\ldots .\end{aligned}$$

(ii)با جایگذاری $-x^2$ بجای x در سری توانی برای $(1+x)^{-\frac{1}{2}}$، به ازای $|x|<1$ بدست می‌آوریم

$$\begin{aligned}\left(1-x^2\right)^{-\frac{1}{2}} &= 1+\frac{1}{2}x^2+\frac{1.3}{2^2.2!}x^4+\frac{1.3.5}{2^3.3!}x^6+\ldots\\ &+\frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2^n\, n!}x^{2n}+\ldots .\end{aligned}$$

بنابر قضیه ۱۷، جمله به جمله انتگرال گرفته و بدست می‌آوریم

$$\begin{aligned}\int_0^x\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} &= x+\frac{1}{2}.\frac{x^3}{2}+\frac{1.3}{2^2\,2!}.\frac{x^5}{5}+\frac{1.3.5}{2^3.3!}.\frac{x^7}{7}+\ldots\\ &+\frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2^n\, n!}.\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+\ldots\end{aligned}$$

و بنابراین

$$arc\sin x = x+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2^n\, n!}.\frac{x^{2n+1}}{2^{n+1}} \qquad (|x|<1).$$

۸ . ۸ سری‌های تیلور و ماکلورن

بنابرفرمول تیلور، اگر تابع f دارای مشتقات متوالی متناهی تا مرتبه $(n+1)$ام در هر نقطه از بازه بازی مانند I شامل نقطه a باشد، آنگاه به ازای هر x در I،

$$f(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{1}{2!}f''(a)(x-a)^2+\ldots+\frac{1}{n!}f^{(n)}(a)(x-a)^n+R_n(x),\ (1)$$

که در آن باقیمانده $R_n(x)$ با

$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(t)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}\quad (x,a \text{ بین } t)$$

داده شده است. فرض کنیم f بینهایت باربر I مشتق‌پذیر باشد، بنابراین f دارای مشتق از تمامی مراتب بر I است. در این صورت (1) برای مقادیر بزرگ دلخواه n برقرار است. این مطلب انگیزه‌ای برای بررسی سری نامتناهی

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n=f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\ldots$$
$$+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+\ldots\ . \qquad (2)$$

می‌گردد. سری (2)، که یک سری توانی در متغیر $x-a$ است، **سری تیلور (بسط) تابع f در** $x=a$ نامیده می‌شود، بدون توجه به این مطلب که آیا سری به تابع f همگرا هست یا نه. این ویژگی لازم است، زیرا در عمل حالتهایی دیده می‌شود که سری تیلور f به تابع f همگرا نمی‌باشد. بهرحال، تنها وضعیت جالب کاربردی موقعی است که سری f حقیقتاً تابع به f همگراست، و در این صورت می‌گوییم که «f **حاصلجمع سری تیلور خودش می‌باشد**».

ممکن است تصور شود این مطلب که f حاصلجمع سری تیلور خودش هست یا نه بستگی به رفتار باقیمانده $R_n(x)$ در فرمول تیلور (1) دارد. قضیه زیر صحت این تصور را نشان می‌دهد.

قضیه ۱۹ (محک همگرایی برای یک سری تیلور): سری تیلور (2)

همگرا به تابع f بر بازه‌ای مانند I است اگر و فقط اگر به ازای هر x در I،

$$\lim_{n\to\infty}R_n(x)=0\ . \qquad (3)$$

اثبات. فرمول (1) خواهد شد

$$f(x)=P_n(x)+R_n(x)$$

که در آن

$$P_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^k(a)}{k!}(x-a)^k\quad (n=0,1,2,\ldots),$$

چند جمله‌ای تیلور است و این چند جمله‌ای‌ها حاصلجمع‌های جزئی سری تیلور (2)می‌باشند. بنابراین (2) همگرا به f است اگر و فقط اگر (x در I) $f(x)=\lim_{n\to\infty}P_n(x)$ ، یا معادل با آن

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}[f(x)-P_n(x)]=0=\lim_{n\to\infty}R_n(x)\qquad (I \text{ در } x)$$

و بدین ترتیب اثبات تمام است.

بنابراین اگر شرط (3) برقرار باشد، می‌توانیم بنویسیم

$$f(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+\ldots \quad (4)$$

با اطمینان کامل به این مطلب که سری توانی طرف راست واقعاً به تابع طرف چپ همگراست. برای $a=0$ سری تیلور (4) به

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\ldots, \qquad (5)$$

تقلیل می‌یابد. سری تیلور به شکل خاص (5) اغلب **سری ماکلورن** نامیده می‌شود.

مثال ۳۴: فرض کنیم $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$ یک سری توانی با بازهٔ همگرایی I و حاصلجمع f باشد. نشان دهید که $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$ سری تیلور تابع f در $x=a$ است. بنابراین سری تیلور تابع حاصلجمع یک سری توانی دقیقاً خود سری توانی می‌باشد.

حل. بنابر قضیه ۱۶، می‌توانیم از سری توانی

$$f(x)=c_0+c_1(x-a)+c_2(x-a)^2+\ldots+c_n(x-a)^n+\ldots \qquad (I \text{ در } x)$$

n بار متوالی مشتق بگیریم. این بدست می‌دهد

$$f^{(n)}(x)=n!c_n+(n+1)!c_{n+1}(x-a)+\frac{(n+2)!}{2!}c_{n+2}(x-a)^2+\ldots \qquad (I \text{ در } x)$$

که از آن، بعد از قراردادن $x=a$، نتیجه می‌گیریم

$$c_n=\frac{f^{(n)}(a)}{n!}. \qquad (n=0,1,2,\ldots)$$

(توجه کنید که $f^{(0)}=f$ و $0!=1$) اما در این صورت

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n,$$

یعنی، $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$ سری تیلور تابع f در $x=a$ است. طبیعتاً، این سری تیلور در هر نقطه از I به تابع f همگراست.

مثال ۳۵: (i) بسط تابع e^x را به سری ماکلورن پیدا کنید.

(ii) بسط تابع $\sin x$ را به سری ماکلورن پیدا کنید.

(iii) بسط تابع $\cos x$ را به سری ماکلورن پیدا کنید.

(iv) بسط تابع $f(x)=\sin x$ را در $x=\frac{\pi}{4}$ به سری تیلور پیدا کنید.

حل. (i) اگر $f(x)=e^x$ ، آنگاه برای هر $n=0,1,2,...$

$$f^{(n)}(x)=e^x \qquad , \qquad f^{(n)}(0)=1$$

و سری ماکلورن (5) خواهد شد

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\ldots, \qquad (6)$$

به شرط آنکه سری طرف راست واقعاً همگرا به e^x باشد. برای اثبات این مطلب، باقیماندهٔ

$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(t)}{(n+1)\ !}x^{n+1}=\frac{e^t}{(n+1)\ !}x^{n+1},$$

را بررسی می‌کنیم که در آن t بین 0 و x قرار دارد (توجه داشته باشید که t به هر دوی n و x بستگی دارد). برای هر x مفروض، بدیهی است که به ازای هر n،

$$0\le |R_n(x)|\le M\left|\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\right| \qquad (7)$$

که در آن M ماکزیمم e^t در بازه $[0,x]$ است هرگاه $x>0$، یا ماکزیمم e^t در $[x,0]$ است هرگاه $x<0$ ، یعنی،

$$M=\begin{cases} e^x & ,x>0 \\ 1 & ,x<0. \end{cases}$$

به علاوه، به ازاء هر مقدار مشخص x ،

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\right|=0 \qquad (8)$$

زیرا سری توانی با جملهٔ عمومی $\frac{x^n}{n!}$، بنابر ملاک خارج قسمت، همگرای مطلق است. لذا، با حد گرفتن در (7) وقتی $n\to\infty$، بدست می‌آوریم که $|R_n(x)|\to 0$ ، یا معادل با آن

$$\lim_{n\to\infty}R_n(x)=0$$

و این برای هر x درست است (توجه کنید که برای هر n ,$R_n(0)=0$). بنابراین سری (6) بر سرتاسر بازه $(-\infty,\infty)$ همگرا به e^x است.

(ii) اگر $f(x)=\sin x$ ، آنگاه

$$f(x)=\sin x, \qquad\qquad f(0)=0,$$
$$f'(x)=\cos x=\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right), \qquad\qquad f'(0)=1,$$
$$f''(x)=-\sin x=\sin\left(x+\frac{2\pi}{2}\right), \qquad\qquad f''(0)=0$$
$$f'''(x)=-\cos x=\sin\left(x+\frac{3\pi}{2}\right), \qquad\qquad f'''(0)=-1,$$

....

$$f^{(n)}(x)=\sin\left(x+\frac{n\pi}{2}\right),\qquad f^{(n)}(0)=\sin\frac{n\pi}{2},$$
$$f^{(n+1)}(x)=\sin\left(x+\frac{(n+1)\pi}{2}\right),$$

و (5) خواهد شد

$$\sin x= x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\dots \quad . \qquad (9)$$

اکنون باقیمانده به صورت

$$R_n(x)=\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\sin\left(t+\frac{(n+1)\pi}{2}\right)$$

است که در آن t بین x,0 قرار دارد (در اینجا x دلخواه ولی مقدار مشخصی است). چون برای t و n دلخواه

$$\left|\sin\left(t+\frac{(n+1)\pi}{2}\right)\right|\le 1,$$

داریم

$$0\le |R_n(x)|\le\left|\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\right|,$$

و بنابراین، با توجه به (8)

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x)=0 .$$

لذا (9) سری ماکلورن تابع $\sin x$ در سرتاسر بازهٔ $(-\infty,\infty)$ است. سری (9) را می‌توان به صورت فشرده‌تر زیر نوشت:

$$\sin x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

(iii)می‌توانیم استدلالی مشابه (ii) ارائه دهیم، اما بسیار آسانتر است که به کمک قضیه ۱۶، از سری ماکلورن برای $\sin x$ جمله به جمله مشتق بگیریم. این فوراً نتیجه می‌دهد که

$$\cos x=\frac{d}{dx}(\sin x)=\frac{d}{dx}\left(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\right)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!},$$

یعنی،

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\dots .$$

(iv) این دفعه داریم

$$f(x)=\sin x \qquad f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\sin\frac{\pi}{4}=\frac{1}{\sqrt2}$$
$$f'(x)=\cos x=\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right), \qquad f'\left(\frac{\pi}{4}\right)=\sin\frac{3\pi}{4}=\frac{1}{\sqrt2}$$

$$f''(x)=-\sin x=\sin\left(x+\frac{2\pi}{2}\right), \qquad f''\left(\frac{\pi}{4}\right)=\sin\frac{5\pi}{4}=-\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$f'''(x)=-\cos x=\sin\left(x+\frac{3\pi}{2}\right), \qquad f'''\left(\frac{\pi}{4}\right)=\sin\frac{7\pi}{4}=-\frac{1}{\sqrt{2}}$$

....

$$f^{(n)}(x)=\sin\left(x+\frac{n\pi}{2}\right), \qquad f^{(n)}\left(\frac{\pi}{4}\right)=\sin\left(\frac{n\pi}{2}+\frac{\pi}{4}\right)$$

$$f^{(n+1)}(x)=\sin\left(x+\frac{(n+1)\pi}{2}\right),$$

و (4) خواهد شد

$$\sin x=\frac{1}{\sqrt{2}}\left[1+\left(x-\frac{\pi}{4}\right)-\frac{1}{2!}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^2-\frac{1}{3!}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^3+\ldots\right],$$

یا به شکل فشرده‌تر

$$\sin x=\frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{\left[\frac{n}{2}\right]}}{n!}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^n, \tag{10}$$

که در آن $\left[\frac{n}{2}\right]$ جزء صحیح $\frac{n}{2}$ است. همان تحلیلی که برای باقیمانده در (i) بکار برده شده نشان می‌دهد که به ازای هر x،

$$\lim_{n\to\infty}R_n(x)=0 .$$

بنابراین (10) سری تیلور همگرا به $\sin x$ در سرتاسر بازهٔ $(-\infty,\infty)$ می‌باشد.

مثال ۳۶: فرض کنیم تابع f با ضابطهٔ

$$f(x)=\begin{cases} e^{\frac{-1}{x^2}} & , x\neq 0 \\ 0 & , x=0 \end{cases}$$

تعریف شده باشد. سری ماکلورن برای f را پیدا کرده و نشان دهید که به ازای تمام مقادیر x همگراست ولی تنها وقتی $x=0$ دارای حاصلجمع $f(x)$ است.

حل. برای یافتن $f'(0)$ از تعریف مشتق استفاده می‌کنیم. داریم

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{e^{\frac{-1}{x^2}}-0}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x}}{e^{\frac{1}{x^2}}} .$$

چون $\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}=\infty$, $\lim_{x\to 0}e^{\frac{1}{x^2}}=+\infty$، دستور هوپیتال را بکار برده و بدست می‌آوریم

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{-1}{x^2}}{e^{\frac{1}{x^2}}\left(\frac{-2}{x^3}\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{2e^{\frac{1}{x^2}}}=0 .$$

با روشی مشابه، استفاده از تعریف مشتق و دستور هوپیتال، برای هر مرتبه از مشتق تابع، مقدار 0 را بدست می‌آوریم. بنابراین، به ازای هر n، $f^{(n)}(0)=0$. لذا سری ماکلورن برای تابع مفروض عبارت است از

$$0+0+0+\ldots+0+\ldots .$$

این سری برای هر مقدار x همگرا به 0 است، اما اگر $x\neq 0$، داریم $f(x)=e^{\frac{1}{x^2}}\neq 0$.

تبصره: بایستی تذکر داده شود که استفاده مستقیم از فرمول (4) یا (5) برای یافتن سریهای تیلور یا ماکلورن یک تابع مفروض اغلب به محاسباتی دشوار و غیر عملی منجر می‌شود. بنابراین باید همواره در جستجوی راه‌هائی باشیم که یک سری تیلور جدید را با استفاده از سری تیلوری که قبلاً برای ما شناخته شده است بیان نماید.

به عنوان مثال، برای یافتن سری ماکلورن x^4e^x، بجای یافتن مستقیم مشتقات x^4e^x ، محاسبه آنها در $x=0$ و جایگذاری مقادیر بدست آمده در فرمول (5)، کافی است سری ماکلورن شناخته شده برای e^x را در x^4 ضرب کنیم، که فوراً نتیجه می‌دهد

$$x^4e^x=x^4\left(1+x+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\ldots\right)$$
$$=x^4+x^5+\frac{x^6}{2!}+\ldots+\frac{x^{n+4}}{n!}+\ldots .$$

به طریق مشابه، برای یافتن سری تیلور e^x در $x=a$ می‌توانیم بنویسیم $e^x=e^a.e^{x-a}$ و سپس فرمول (5) را بکار بریم که در آن بجای x از $x-a$ استفاده شده است. در این صورت داریم

$$e^x=e^a\left[1+(x-a)+\frac{(x-a)^2}{2!}+\frac{(x-a)^3}{3!}+\ldots+\frac{(x-a)^n}{n!}+\ldots\right].$$

اگر سری تیلور تابع f در $x=a$ همگرا به f باشد، آنگاه این دقیقا همان چیزی است که قبلا بسط تابع f به سری توانی در $x=a$ نامیده می‌شد. این یک نتیجه آنی از خاصیت یکتایی سری توانی است که در مثال ۳۴ مورد بررسی قرار گرفت. بنابراین دریافتن سری تیلور، تمامی روش‌های بخش ۸ . ۷ هنوز در اختیار ما هستند و می‌توانیم از آن‌ها استفاده نماییم. به کمک آن‌ها، اغلب این امکان وجود دارد که سری تیلور یک تابع مفروض f را غیر مستقیم ،بدون نیاز به محاسبه مشتقات f یا بررسی باقیمانده $R_n(x)$، پیدا نمائیم.